

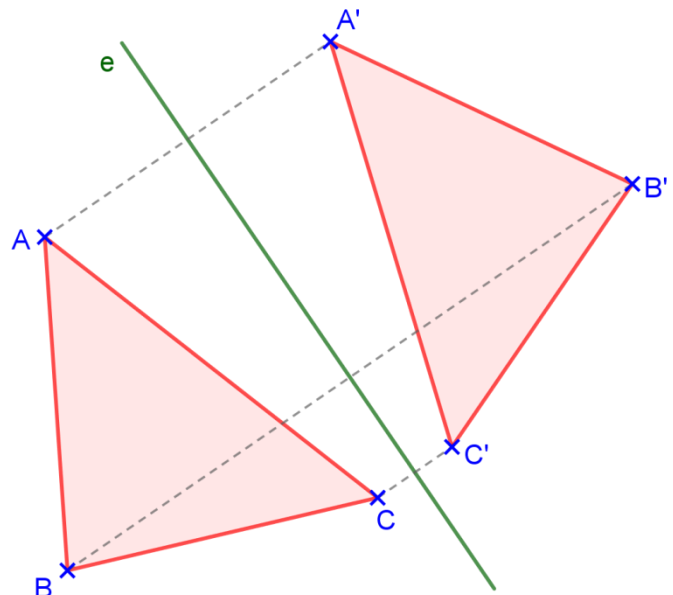
PARTE I SIMETRIA e MÉTODOS DE TANGÊNCIA

1.1. Simetria Axial ou Rebatimento

Definição: Um ponto A' é simétrico de um ponto A em relação a um eixo e (eixo de simetria) quando o segmento AA' , perpendicular à reta e , é dividido ao meio pela mesma. Ou seja, a reta e é a mediatriz do segmento AA' .

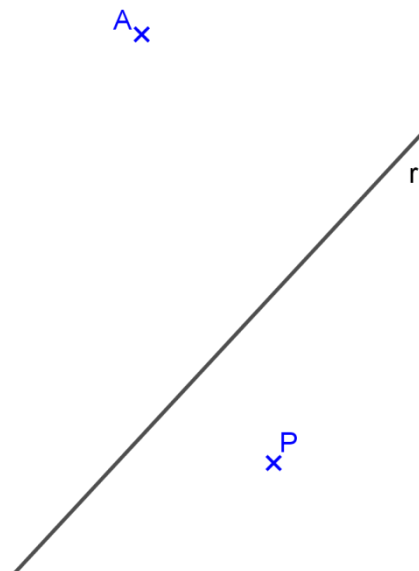
Propriedades:

1. Duas figuras simétricas em relação a um eixo são congruentes.
2. Retas simétricas em relação a um eixo formam ângulos iguais com este eixo.

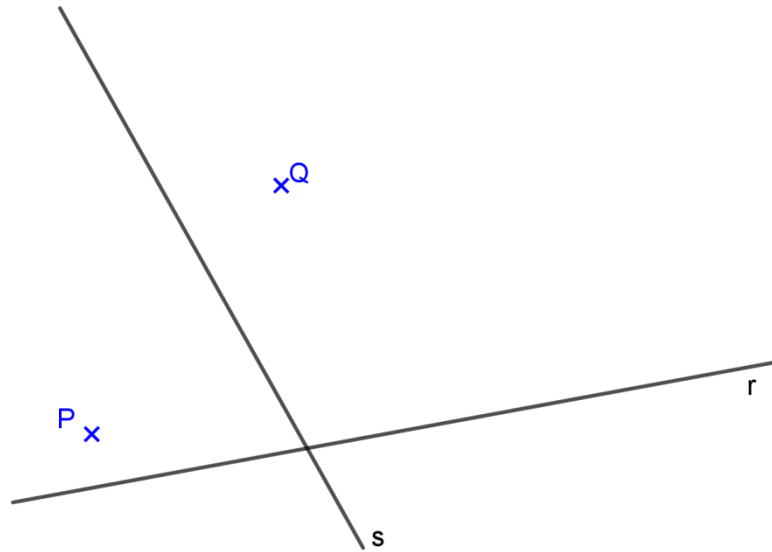


Exercícios:

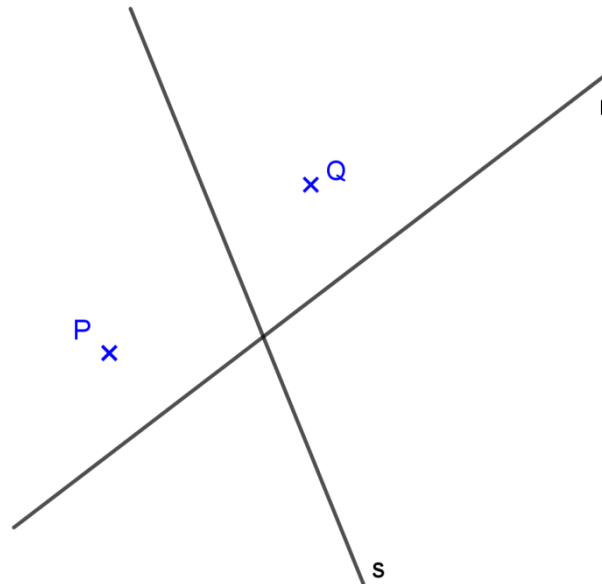
1. Construa um triângulo ABC isósceles de base BC , dados o vértice A , um ponto P do lado BC e a reta r que contém a bissetriz do ângulo B .



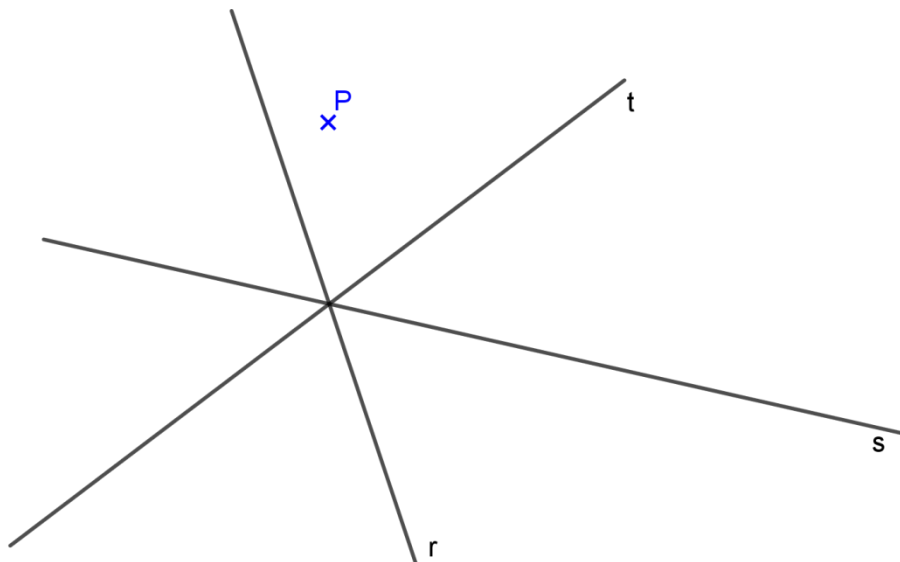
2. Construa o triângulo ABC, sendo dados um ponto P do lado AB, um ponto Q do lado AC, a reta r suporte do lado BC e a reta s que contém a bissetriz do ângulo \hat{A} .



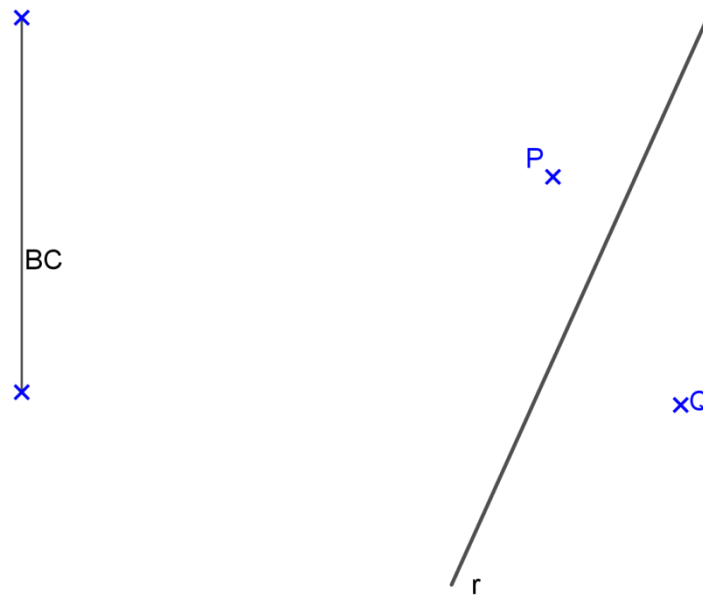
3. Construa um triângulo ABC, dados os pontos P e Q dos lados AB e AC, respectivamente, e as retas r e s que contêm as bissetrizes dos ângulos B e A, respectivamente.



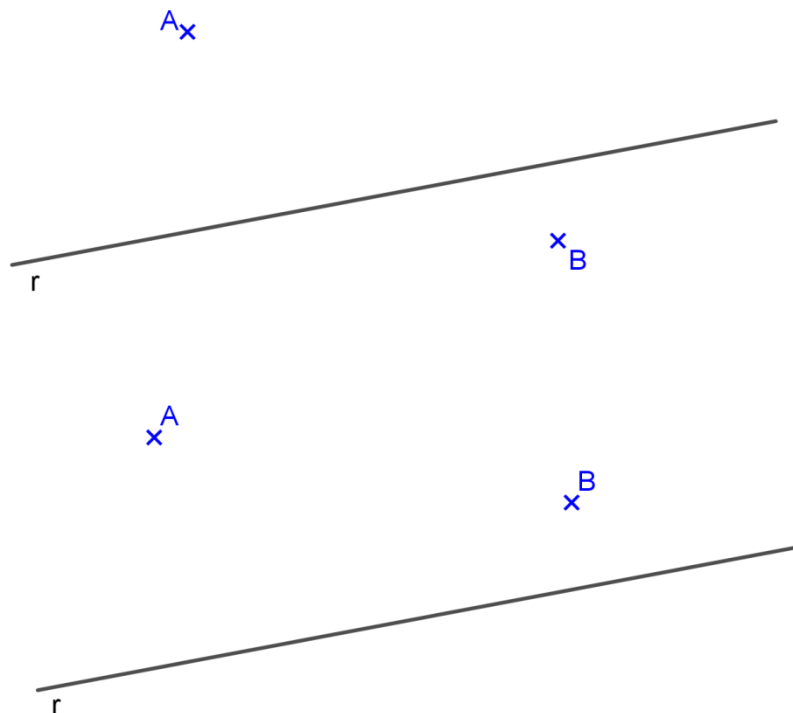
4. Construa um triângulo ABC, dados um ponto P pertencente ao lado AB e as retas r, s e t, que contêm as bissetrizes internas dos ângulos A, B e C, respectivamente.



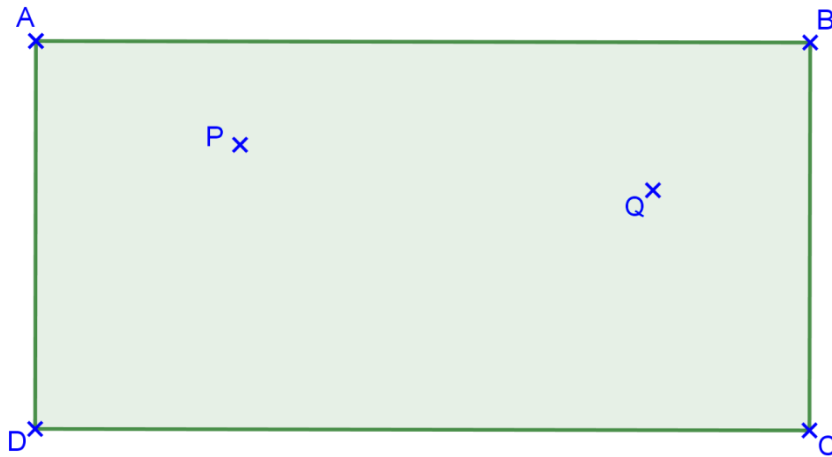
5. Construa um triângulo ABC isósceles de base BC, dados os pontos P e Q dos lados AB e AC, respectivamente, a reta r mediatriz de BC e a medida do lado BC.



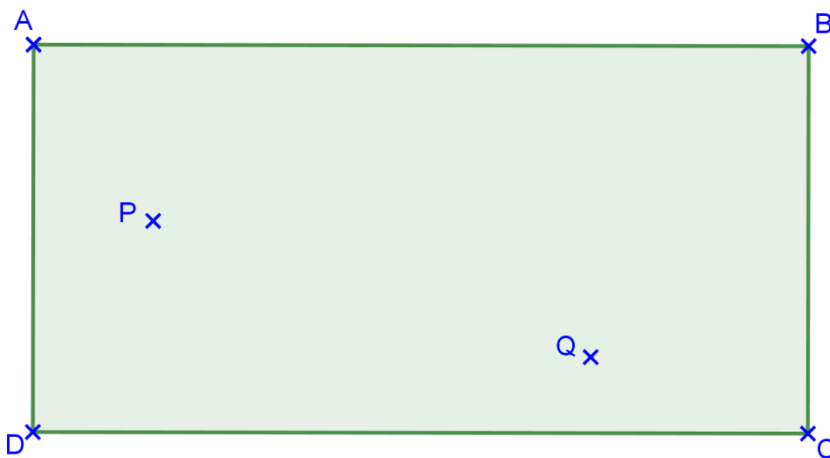
6. São dados uma reta r e dois pontos A e B. Determine um ponto X dessa reta tal que $AX + XB$ seja mínimo.



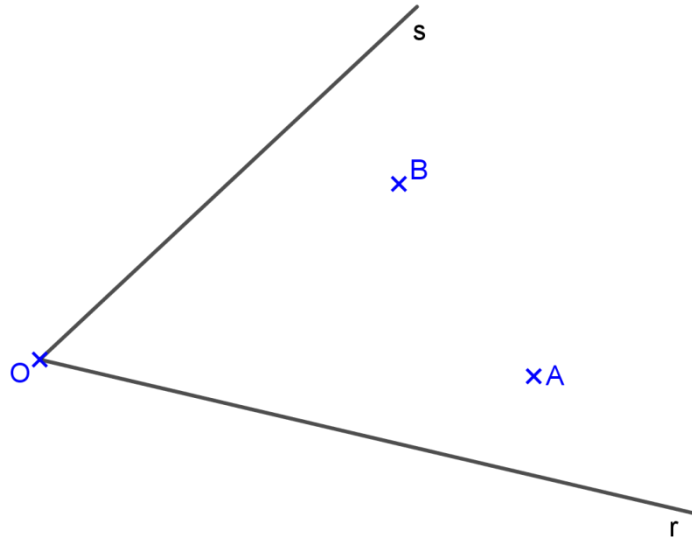
7. Numa mesa de bilhar ABCD há duas bolas, uma situada num ponto P e a outra num ponto Q. Determine a trajetória que deve seguir a bola situada em P, para que, após ter feito tabelas em AB e BC, atinja a bola situada em Q.



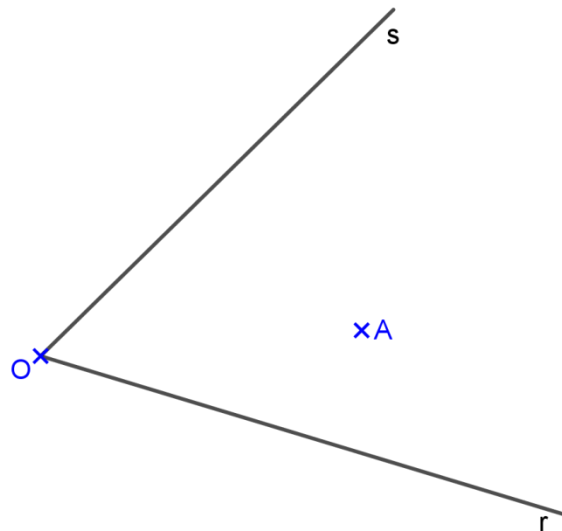
8. Idem ao exercício anterior, porém, fazendo tabelas em AB, BC e CD respectivamente.



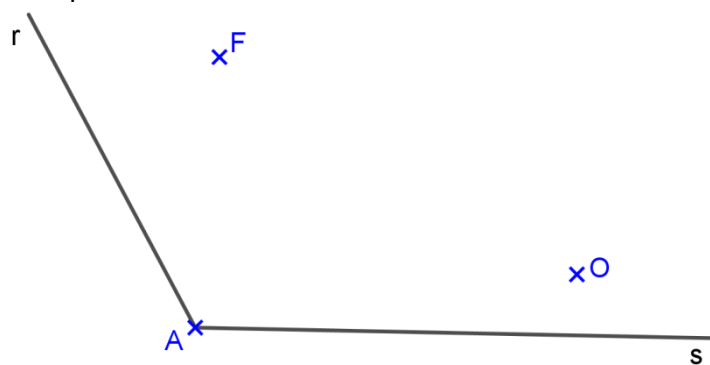
9. São dados um ângulo $r\hat{O}s$ e dois pontos A e B no seu interior. Determine nas semi-retas Or e Os os pontos C e D, respectivamente, tal que o perímetro do quadrilátero ABCD seja mínimo.



10. São dados um ângulo $r\hat{O}s$ e um ponto A no seu interior. Determine os pontos B e C, em cada um dos lados do ângulo, tal que o triângulo ABC tenha perímetro mínimo.



11. Na figura dada, r e s representam dois espelhos planos e F uma fonte de luz. Determine a trajetória que deve seguir um raio de luz emitido de F, de modo que ele se reflita em r, depois em s, e depois atinja objeto localizado no ponto O.

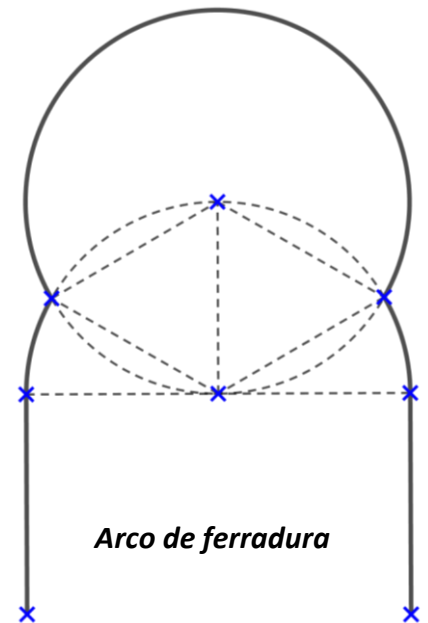


1.2. Aplicações de Tangência e Concordância: arcos, ovais e espirais

Definição: Denomina-se **arco** a uma curva constituída de linhas concordantes apoiadas em duas semi-retas, r e s , paralelas, nos pontos de origem A e B , respectivamente.

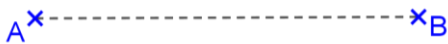
Elementos: Todo arco é formado por:

- Pontos de nascença ou de origem: são pontos que determinam as extremidades do arco.
- Vão, base do arco ou abertura: é a distância entre os pontos de origem.
- Flecha: é a distância entre o ponto mais alto do arco e a reta base do arco.
- Suportes: são as semi-retas paralelas que sustentam o arco.

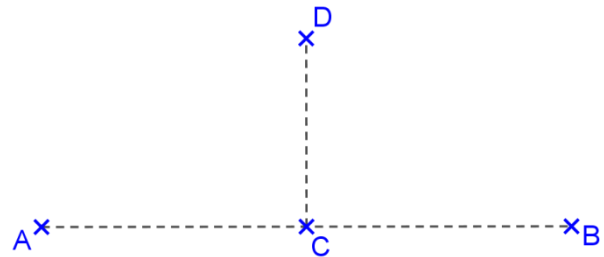


Exercícios propostos:

1. Construa um **arco pleno** (a flecha é igual à metade do vão), dada a medida do vão AB .

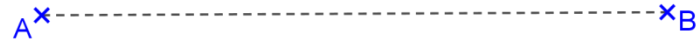


2. Construa um **arco abatido** (concordância de um número ímpar de arcos de circunferência, onde a flecha é menor que a metade do vão) de 3 centros, dados o vão AB e a flecha CD .

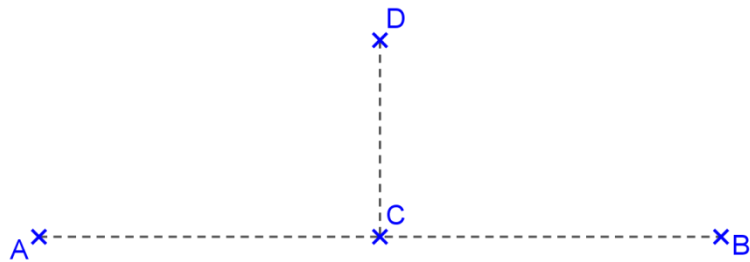


3. Construa um **arco abatido** de 3 centros com vão AB mede 7cm e a flecha CD mede 1,5cm.

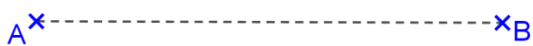
4. Construa um **arco abatido**, de vão AB.



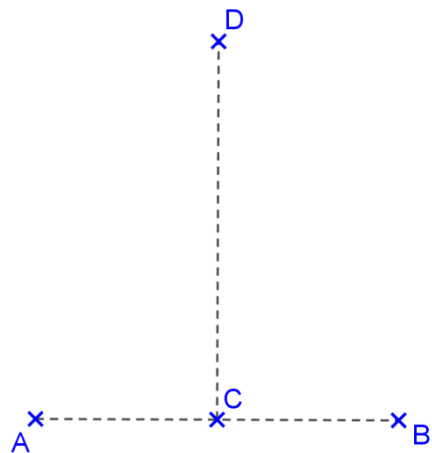
5. Construa um **arco abatido**, dados o vão AB e a flecha CD, conjugando-o em outros dois arcos abatidos menores.



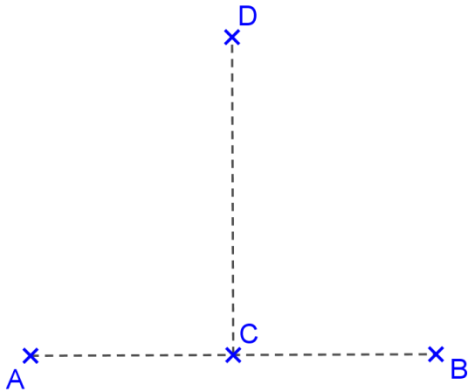
6. Construa um **arco ogival** (flecha maior que a metade do vão) com vão AB.



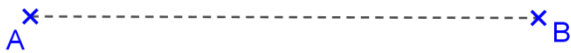
7. Construa um **arco ogival**, conhecendo-se o vão AB e a flecha CD (flecha maior do que o vão).



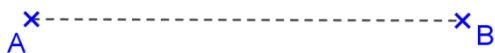
8. Construa um **arco ogival**, conhecendo-se o vão AB e a flecha CD (flecha menor que o vão).



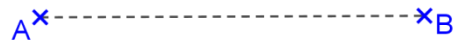
10. Construa um **arco gótico flamejante** com vão AB.



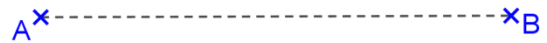
12. Construa um arco **ogival de ferradura** com vão AB e ângulo de 30° .



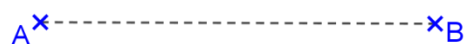
9. Construa um **arco gótico** conhecendo-se o vão AB.



11. Construa um **arco otomano** com vão AB.



13. Construa um arco **ogival de ferradura** com vão AB e ângulo de 45° .



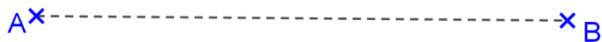
14. Construa um **arco esconso** de origens A e B.



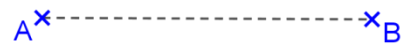
15. Construa um **arco esconso** de origens A e B, com BC menor que $\frac{1}{3}$ de AC.



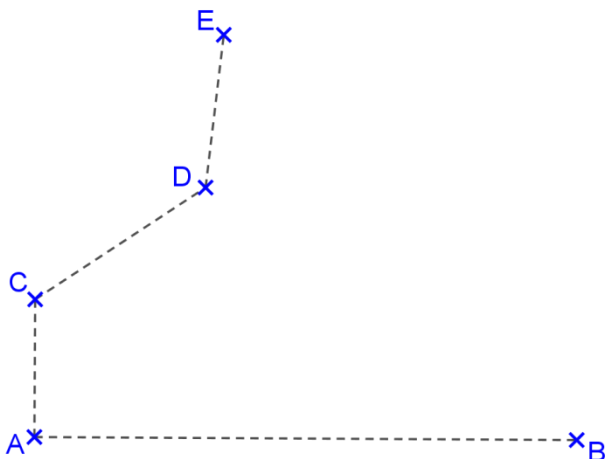
16. Construir um **arco Tudor** com vão AB.



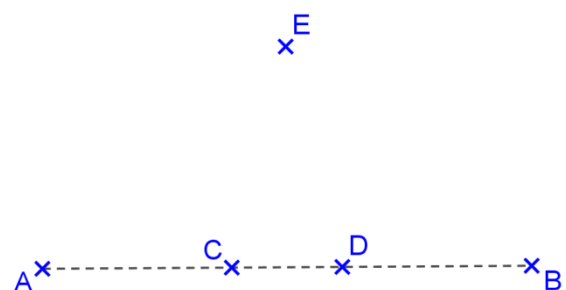
17. Construir um **arco Mourisco** com vão AB.



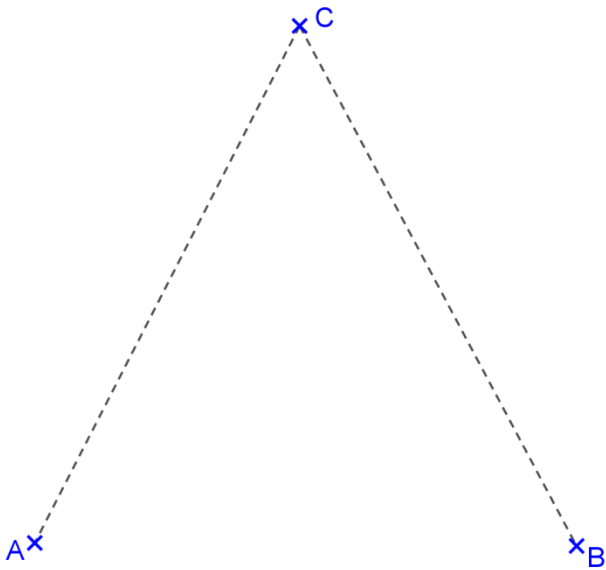
18. Construir um **arco geminado**, dados o vão AB e os centros dos demais arcos de circunferência C, D e E de um dos lados do arco geminado.



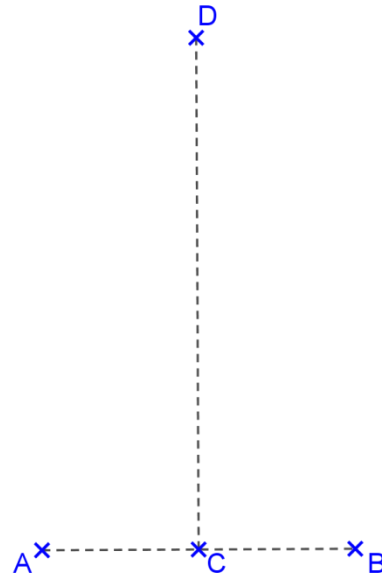
19. Construir um **arco trilobado** com arcos de circunferência de centros C e D, com arco de centro E de raio qualquer.



20. Arco parabólico, dados AB e BC.



21. Arco bulbiforme, com vão AB e flecha CD (a flecha deve ser maior do que o vão).

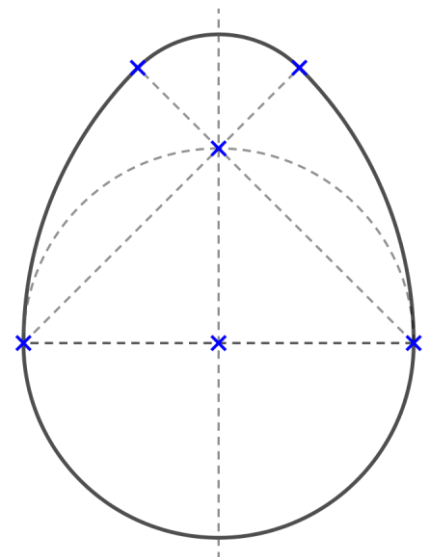


Definição: As **ovais** são curvas fechadas, constituídas por arcos de circunferências concordantes entre si, possuindo dois eixos: maior e menor.

Classificação das ovais:

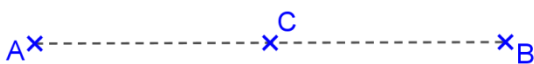
As ovais podem ser:

- regulares ou falsas elipses – formadas por arcos concordantes e simétricos dois a dois, possuem dois eixos de simetria de tamanhos diferentes;
- irregulares – formadas por arcos concordantes, possuem apenas um eixo de simetria, são chamadas de óvulos.

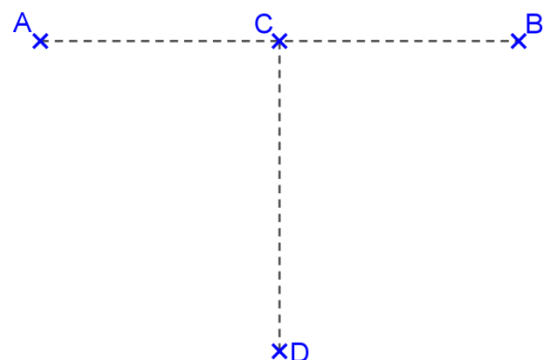


Exercícios propostos:

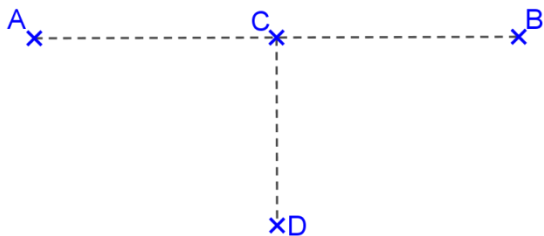
1. Construir uma **oval irregular** de 4 centros conhecendo-se o eixo menor AB.



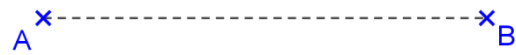
2. Construir uma **oval irregular alongada** conhecendo-se o eixo menor AB, e sabendo-se que o centro do arco menor é o ponto D (CD é maior do que a metade de AB).



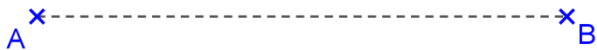
3. Construir uma **oval irregular encurtada** conhecendo-se o eixo menor AB, e sabendo-se que o centro do arco menor é o ponto D (CD é menor do que a metade de AB).



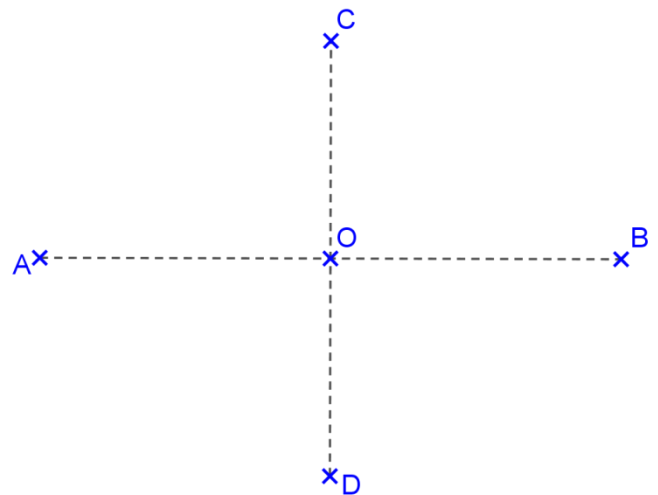
4. Construir uma **oval regular** conhecendo-se o eixo menor AB.



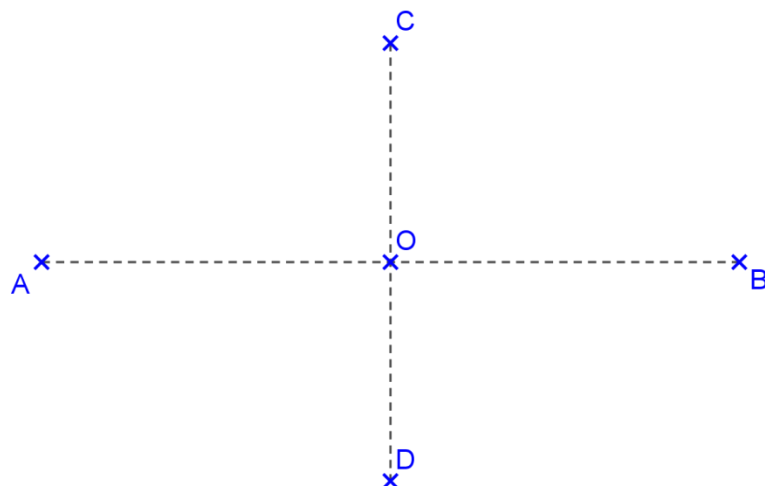
5. Construir uma **oval regular** de 4 centros conhecendo-se o eixo maior AB.



6. Construir uma **oval regular** com eixo menor CD e o eixo maior AB.

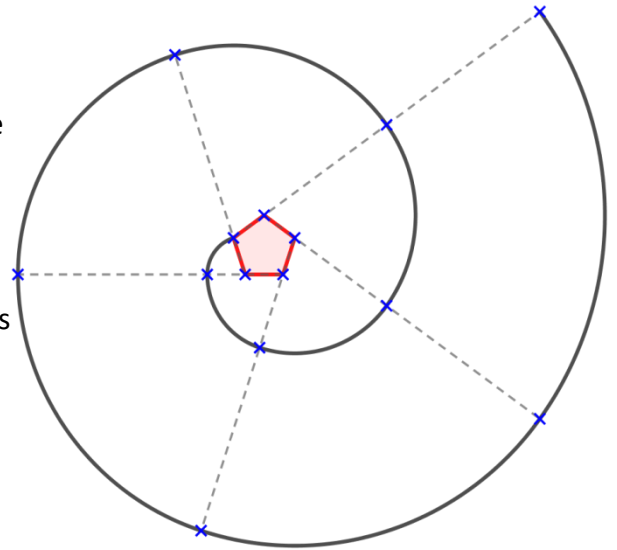


7. Construir uma **oval regular** com eixo menor CD e o eixo maior AB (método do retângulo).



Definição: Chama-se **espiral** a curva descrita por um ponto que se desloca com um movimento retilíneo uniforme (ou não), sobre uma reta, ao mesmo tempo em que este ponto gira em movimento circular também uniforme.

Existem dois tipos de espirais: as **verdadeiras**, que são traçadas por pontos auxiliares à mão livre (por exemplo, espiral de Arquimedes, hiperbólica e espiral logarítmica); e as **falsas**, que é o nome dado às curvas formadas por arcos concordantes que lembram o formato de uma espiral.



Elementos de uma falsa espiral:

- núcleo** – é um polígono regular ou irregular, que contém os vários centros dos arcos que formam a espiral. Na espiral verdadeira, o núcleo é substituído por um ponto de centro, chamado pólo;
- centros** – são os centros dos arcos que formam a espiral;
- raios vetores** – prolongamentos dos lados do núcleo. Na espiral verdadeira são linhas que saem do pólo a um ponto qualquer da curva;
- espira** – cada evolução completa da espiral;
- passo** – distância entre duas espiras.

Observação: O desenvolvimento de uma espiral pode ser no sentido horário ou anti-horário.

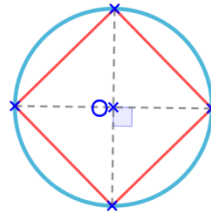
Exercícios:

- Construa uma **falsa espiral de 2 centros** (bicêntrica), no sentido horário, sabendo que seus centros distam 0,5cm.
- Construa uma **falsa espiral de 3 centros regular** (tricêntrica), no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos pontos A, B e C, dados, onde $AB = BC = AC = 1\text{cm}$.

3. Construa uma **falsa espiral de 3 centros irregular** (tricêntrica), no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos pontos A, B e C: $AB = 0,5\text{cm}$, $BC = 1\text{cm}$ e $AC = 0,7\text{cm}$.
4. Construa uma **falsa espiral de 4 centros** (quadricêntrica), no sentido anti-horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos vértices do quadrado ABCD de lado $0,5\text{cm}$.
5. Construa uma **falsa espiral ovalada** de 4 centros, no sentido horário, sabendo que seu núcleo é formado pelos vértices do retângulo ABCD de lados iguais a $0,5\text{cm}$ e $1,1\text{cm}$.

6. Construa um retângulo áureo de lado maior 10cm e a **espiral de Fibonacci ou de ouro** (esta espiral aproxima-se de uma espiral logarítmica).
7. Construa um triângulo áureo de lado maior 12cm e a **espiral de ouro** (esta espiral aproxima-se de uma espiral logarítmica).

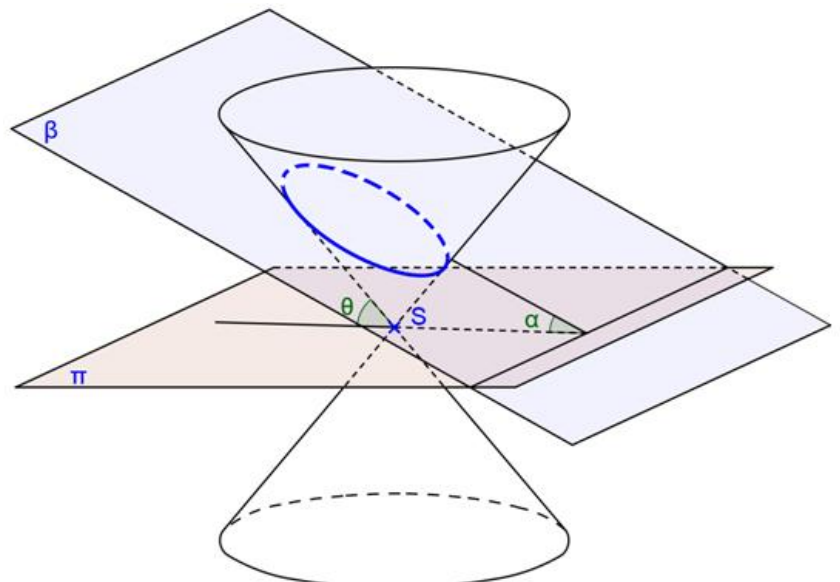
8. Construa uma **Voluta Jônica** a partir do quadrado inscrito na circunferência dada.



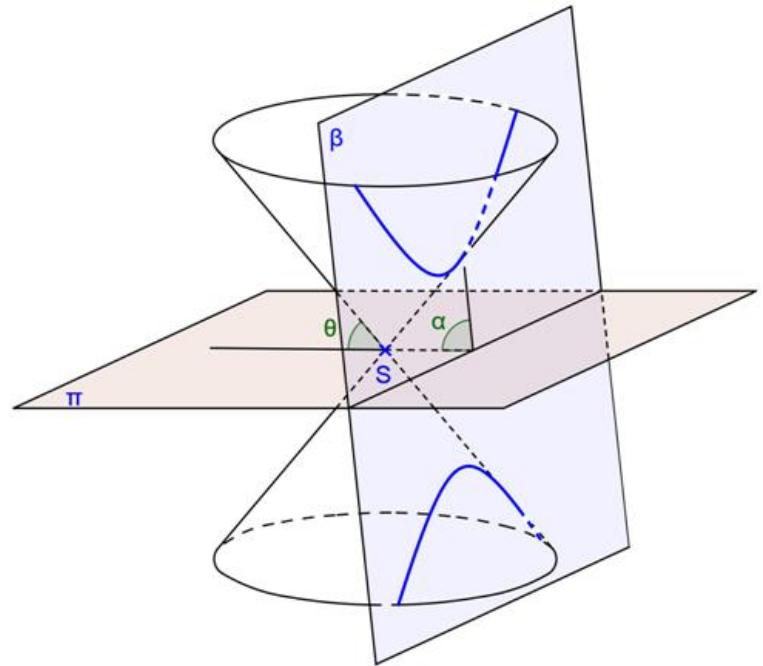
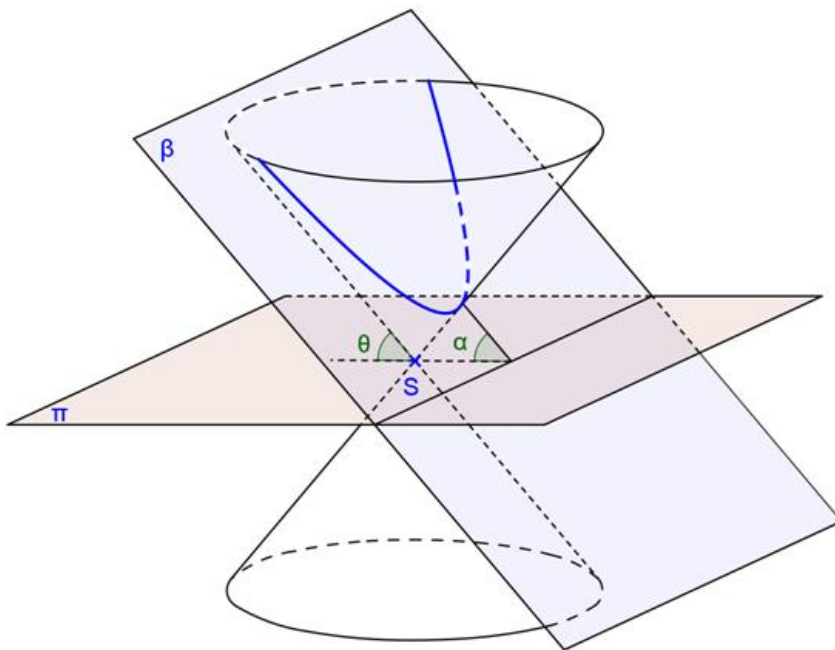
PARTE II - CÔNICAS

A interseção de um plano com um cone determina três figuras, cujos contornos são chamados elipse, hipérbole ou parábola. Por esta razão, a elipse, a hipérbole e a parábola são denominadas seções cônicas, ou, simplesmente, cônicas. Considere o plano π , perpendicular ao eixo da superfície cônica e que contém o vértice S . Além disso, considere os seguintes ângulos: θ formado entre as geratrizes do cone e o plano π ; e α formado entre o plano π e o plano de seção β .

Quando $\alpha < \theta$, temos a interseção do plano β em apenas uma das folhas da superfície cônica, determinando a curva fechada chamada **elipse**.



Quando $\alpha > \theta$, as duas folhas da superfície cônica são intersectadas pelo plano β , determinando a curva aberta chamada **hipérbole**.



No caso em que $\alpha = \theta$, o plano β fica paralelo a uma geratriz do cone e intersecta uma das folhas da superfície, determinando a curva aberta chamada **parábola**.

A demonstração do teorema de Apollonius fornece a relação entre os pontos das cônicas.

Teorema de Apollonius: A seção feita em um cone por um plano qualquer é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, segundo o plano secante faz com o eixo do cone um ângulo superior, igual ou inferior ao semi-ângulo no vértice do cone.

Este ângulo é o complementar do ângulo θ mostrado anteriormente. A demonstração do teorema de Apollonius foi feita pelos matemáticos Dandelin e Quetelet e está baseada nas esferas inscritas na superfície cônica.

2.1. Elipse

Considere um plano δ perpendicular ao plano secante β que passa pelo eixo do cone, intersectando a superfície cônica segundo as geratrizes SE e SE' . O plano da figura e o plano secante β cortam-se segundo a reta A_1A_2 . Traçando-se as circunferências inscrita e ex-inscrita ao triângulo A_1SA_2 entre as geratrizes do cone, estas tocam A_1A_2 nos pontos F_1 e F_2 . As esferas estão inscritas no cone e são tangentes ao plano secante nos pontos F_1 e F_2 .

O contato da esfera de centro O com o cone é o círculo que tem diâmetro DD' . A esfera de centro O' tangencia o cone segundo um círculo de diâmetro EE' .

Escolhendo-se um ponto P qualquer sobre a curva de seção, podemos construir os segmentos PF_1 e PF_2 e a geratriz SP que corta em L e L' os segmentos paralelos DD' e EE'. A medida do segmento PF_1 é igual à medida de PL' , pois são tangentes a uma esfera traçadas do mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, temos que $PF_2 = PL$.

Como a curva de seção está entre os planos DLD' e EL'E', deixando P entre L e L', podemos concluir que $LL' = L'P + PL = PF_1 + PF_2$. Como as duas geratrizes estão entre os planos perpendiculares ao eixo, temos que $LL' = DE$.

$$PF_1 + PF_2 = DE. \tag{1}$$

O perímetro do triângulo SA_1A_2 mede $2p = SD' + SD + DA_2 + A_2F_2 + A_1F_2 + D'A_1$.

Porém, temos que $SD = SD'$, pois são

tangentes a uma esfera traçadas por um mesmo ponto. Pelo mesmo motivo, temos que $DA_2 = A_2F_2$ e $A_1F_2 = D'A_1$. Logo,

$$2p = 2SD + 2A_2F_2 + 2A_1F_2 \Rightarrow p = SD + A_2F_2 + A_1F_2 \Rightarrow A_2F_2 + A_1F_2 = p - SD. \tag{2}$$

Considerando o mesmo triângulo e o ponto de tangência da circunferência ex-inscrita, temos que $2p = SA_2 + A_2F_1 + A_1F_1 + A_1S$. Como temos retas tangentes traçadas do mesmo ponto à superfície da esfera de centro O' , ou seja, $A_2F_1 = A_2E$ e $A_1F_1 = A_1E'$.

Substituindo A_2F_1 e A_1F_1 , temos que $2p = SA_2 + A_2E + A_1S + A_1E'$ ou $2p = SE + SE'$. Como $SE = SE'$, obtemos $2p = 2SE$ ou $p = SE$. Substituindo na relação (2) p pelo seu valor SE, obtemos que $A_1A_2 = SE - SD$, ou seja, $SE - SD = ED$. Logo, temos que $A_1A_2 = DE$, e substituindo-se na relação (1), obtemos a relação entre as distâncias de um ponto qualquer P da elipse e os pontos F_1 e F_2 :

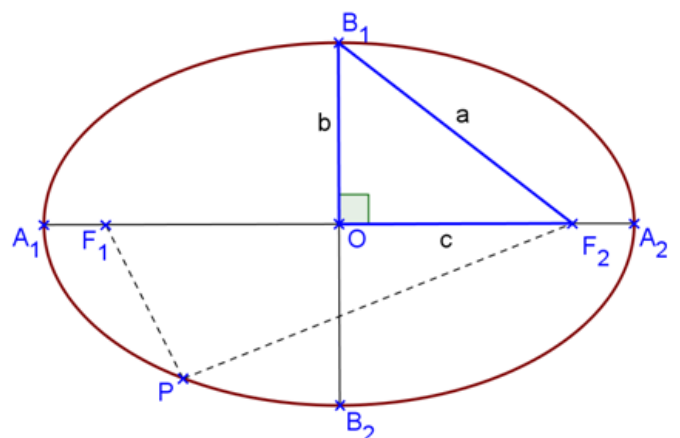
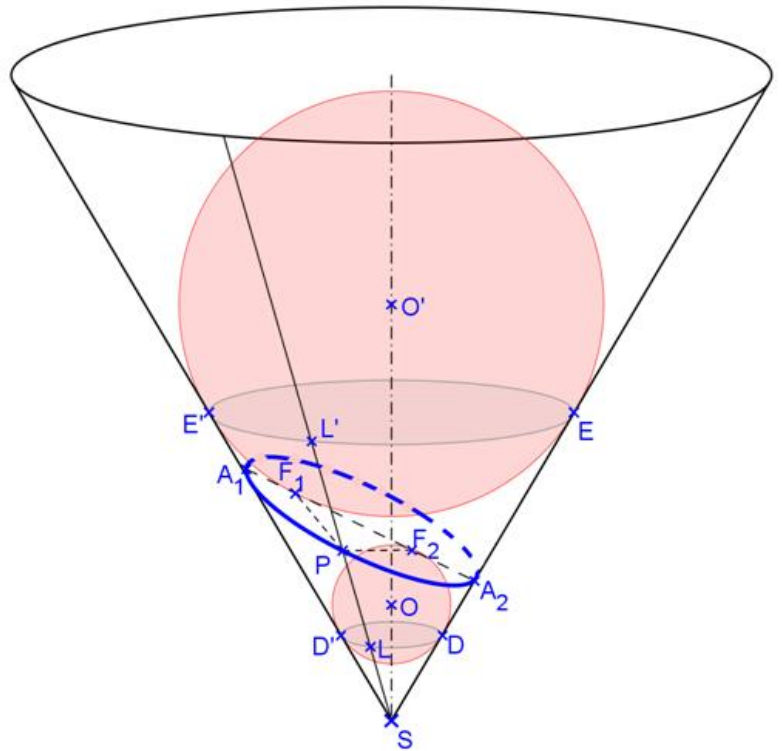
$$PF_1 + PF_2 = A_1A_2.$$

Definição: Considere os pontos F_1 e F_2 , tais que $F_1F_2 = 2c$, e uma distância $2a$, de modo que $2a > 2c$.

Chama-se **elipse** o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a **2a**. Se P é um ponto da elipse, então temos que $PF_1 + PF_2 = 2a$.

Elementos da elipse:

- a) **focos** – são os pontos F_1 e F_2 .
- b) **distancia focal** – $F_1F_2 = 2c$.
- c) **vértices** – A_1, A_2, B_1 e B_2 ; onde A_1 e A_2 são os pontos de interseção da reta F_1F_2 com a elipse; e B_1 e B_2 são os pontos onde a mediatriz de F_1F_2 intersecta a elipse.
- d) **diâmetro maior** – é o segmento A_1A_2 .
- e) **diâmetro menor** – é o segmento B_1B_2 .
- f) **centro** – é o ponto O, médio de F_1F_2 ; é um centro de simetria da curva.
- g) **eixos de simetria** – são as retas A_1A_2 e B_1B_2 .

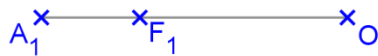


Propriedades:

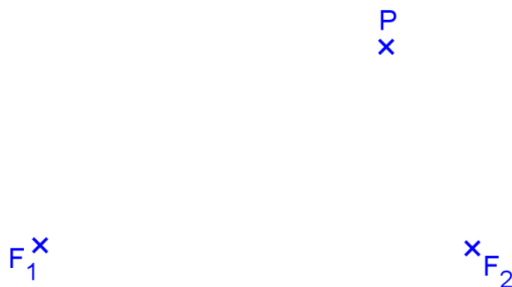
1. $A_1F_1 = F_2A_2$.
2. A distância dos vértices B_1 e B_2 até cada um dos focos é a medida a .
3. Por convenção adota-se $B_1B_2 = 2b$. Logo, temos que, $a^2 = b^2 + c^2$.

Exercícios:

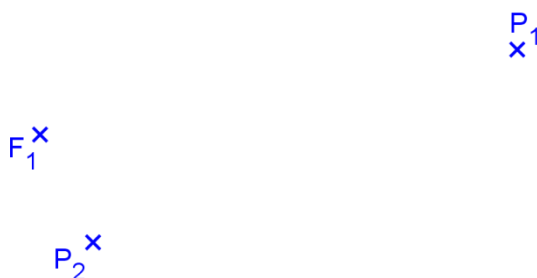
1. Determine os vértices e os focos de uma elipse, dados F_1 , A_1 e O . Construa a elipse por pontos.



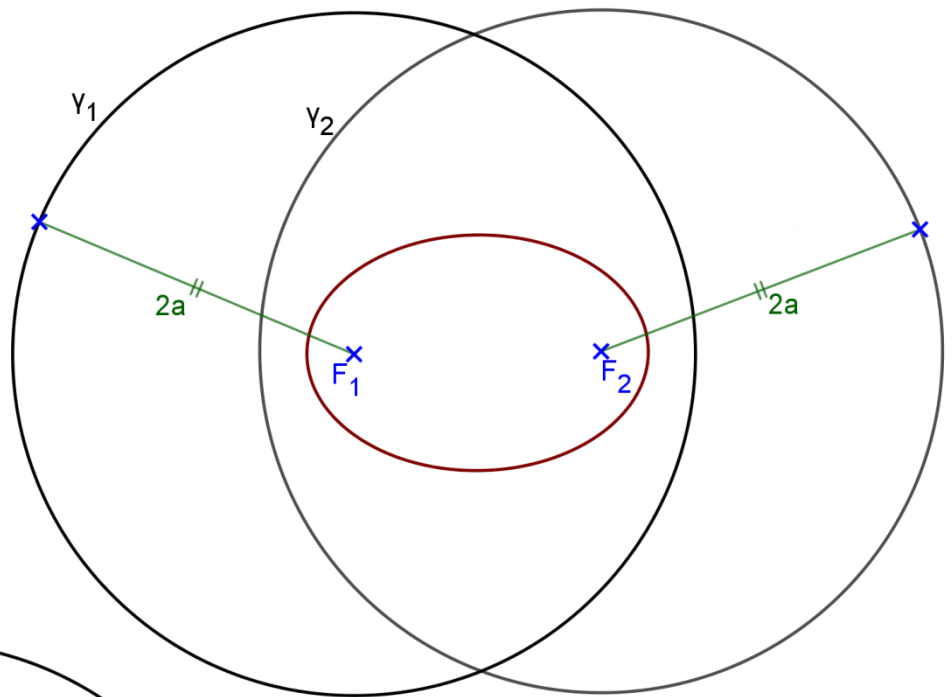
2. Determine os vértices de uma elipse, dados os focos e um ponto P da mesma.



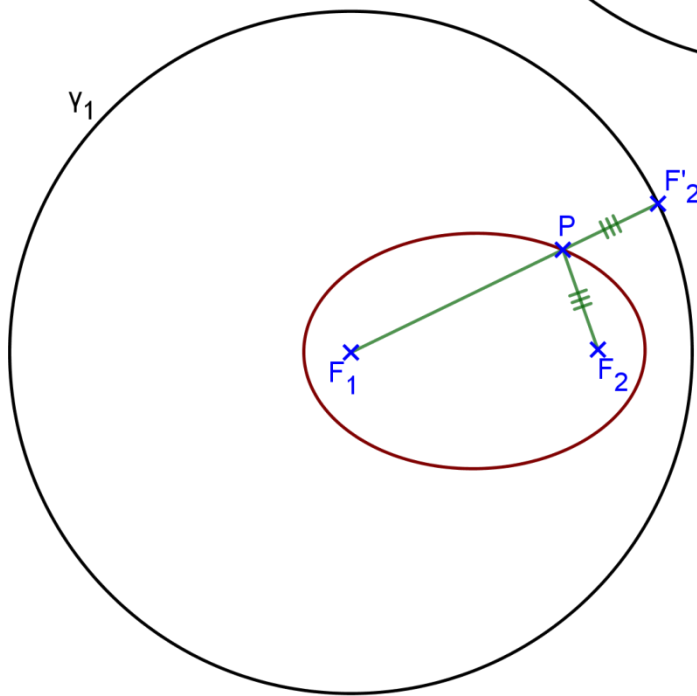
3. Construa os diâmetros da elipse, dados o foco F_1 e os pontos, P_1 e P_2 simétricos em relação ao centro.



Definição: As circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a $2a$ são chamadas de circunferências diretrizes da elipse. A circunferência diretriz γ_1 de centro F_1 é relativa ao foco F_1 , e a outra γ_2 relativa ao foco F_2 .



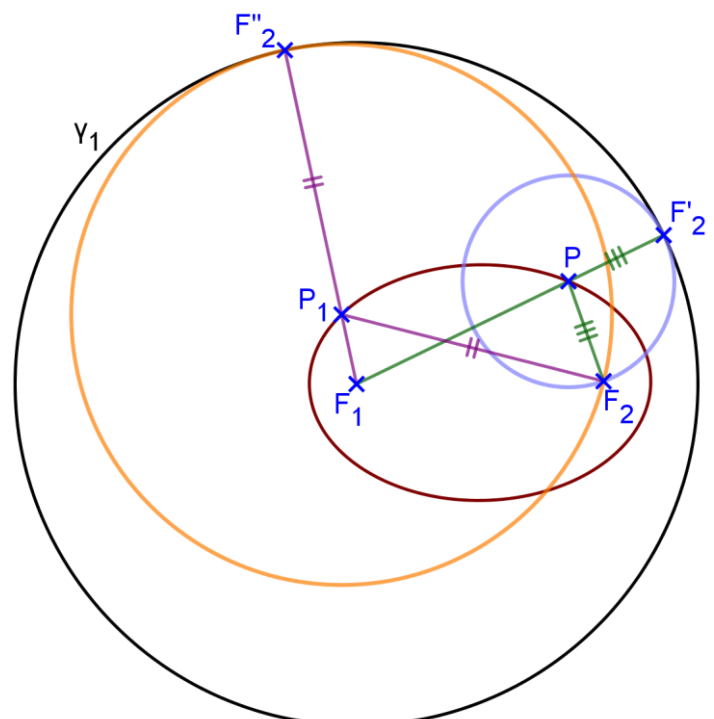
Propriedade: $PF_2 = PF'_2$



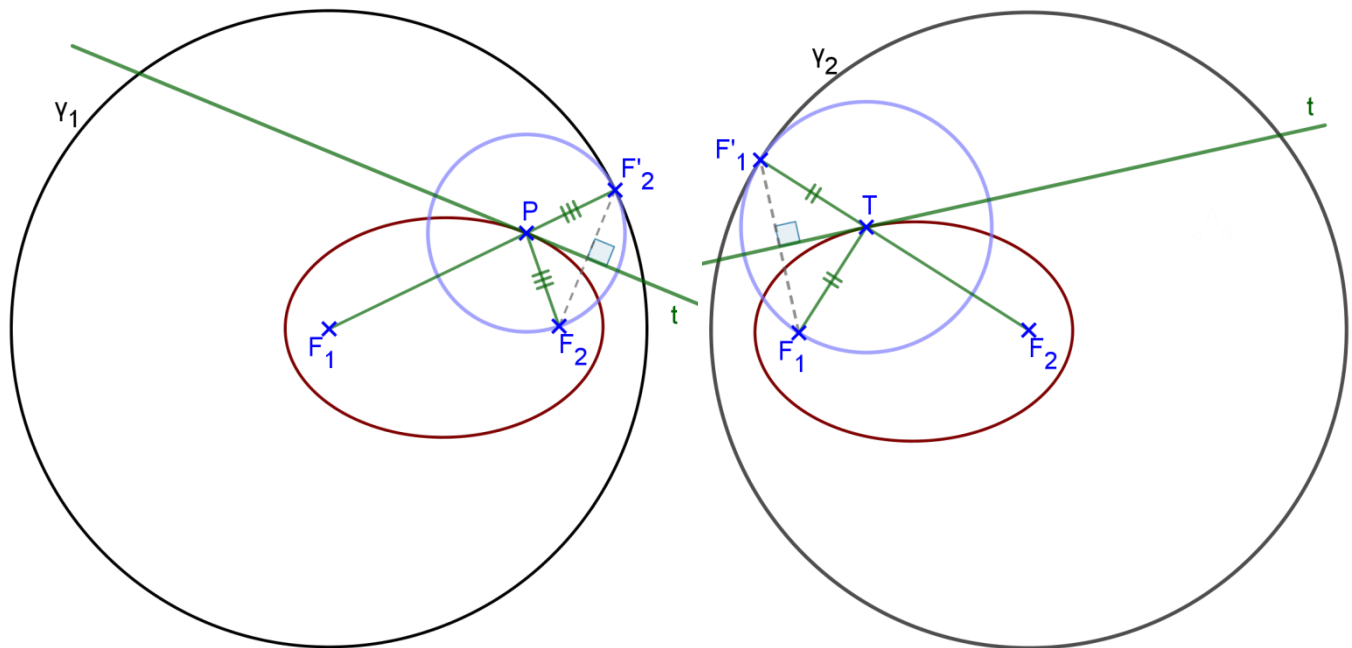
Note que é o mesmo que: toda circunferência que tem o centro em um ponto qualquer de uma elipse e passa por um foco da mesma é tangente internamente à circunferência diretriz do outro foco. Logo, temos uma nova definição para a elipse.

Definição: Dados uma circunferência γ_1 de centro F_1 e um ponto F_2 no seu interior. Chama-se **elipse** o lugar geométrico dos centros P das circunferências que passam por F_2 e tangenciam γ_1 .

O mesmo raciocínio vale para a circunferência γ_2 : a elipse é o lugar geométrico dos centros P das circunferências que passam por F_1 e tangenciam γ_2 .



Propriedade: uma reta e uma elipse são tangentes quando, e somente quando, o simétrico de qualquer dos dois focos da elipse em relação à reta pertence à circunferência diretriz relativa ao outro foco.



Observações (1ª figura)

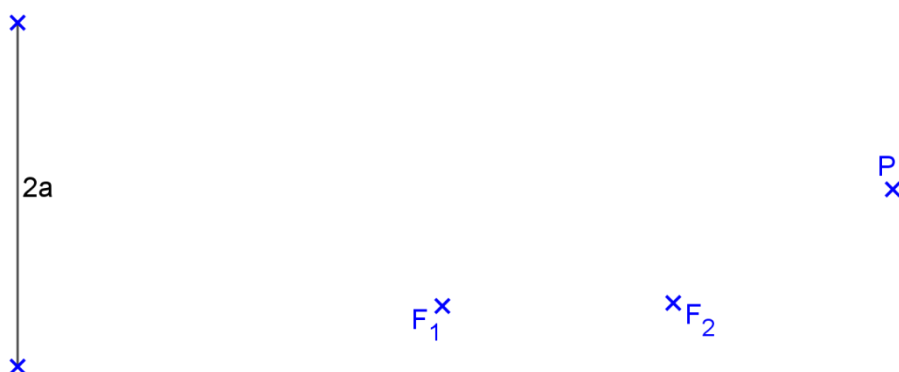
- a reta tangente t é a mediatriz de $F_2F'_2$, onde F'_2 é o simétrico de F_2 em relação a reta t ;
- F_1 , T e F'_2 estão alinhados.

Observações (2ª figura)

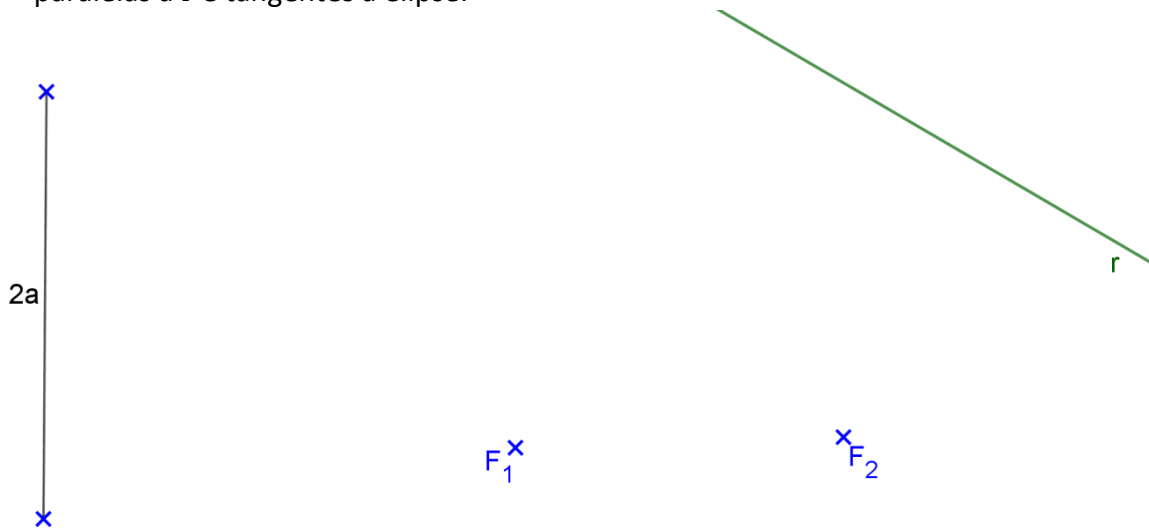
- a reta tangente t é a mediatriz de $F_1F'_1$, onde F'_1 é o simétrico de F_1 em relação a reta t ;
- F_2 , T e F'_1 estão alinhados.

Exercícios:

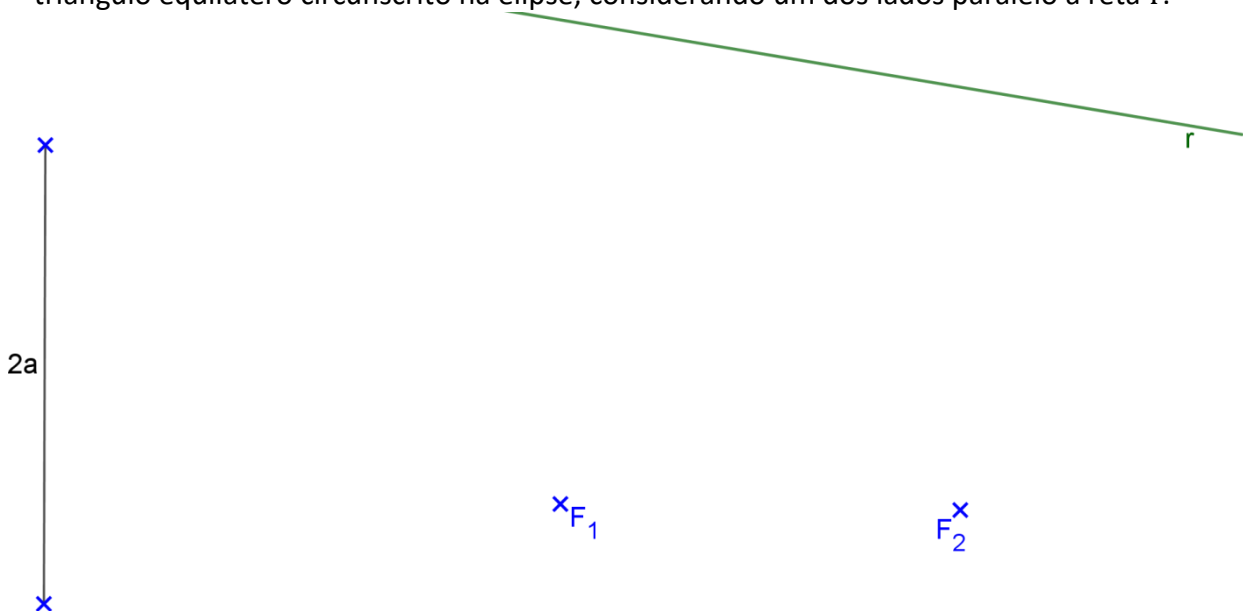
1. Dados os focos e o comprimento $2a$ do diâmetro maior de uma elipse e um ponto P externo a ela, construa pelo ponto P as retas tangentes à elipse e determine os respectivos pontos de tangência.



2. Dados os focos e o comprimento $2a$ do diâmetro maior de uma elipse e uma reta r , construa as retas paralelas a r e tangentes à elipse.



3. Dados os focos e o comprimento $2a$ do diâmetro maior de uma elipse e uma reta r , construa o triângulo equilátero circunscrito na elipse, considerando um dos lados paralelo à reta r .

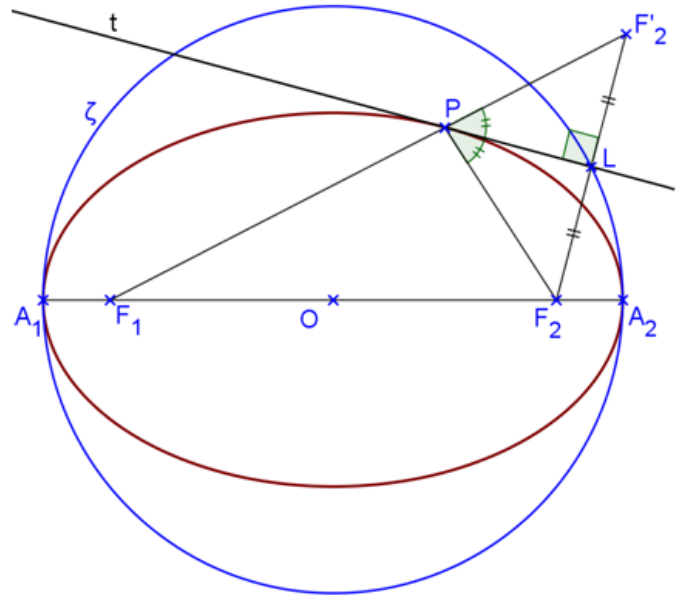


Definição: A circunferência principal de uma elipse tem centro em O e raio a.

Propriedade: A circunferência principal de uma elipse contém os pés das retas perpendiculares às tangentes à elipse que passam pelos focos.

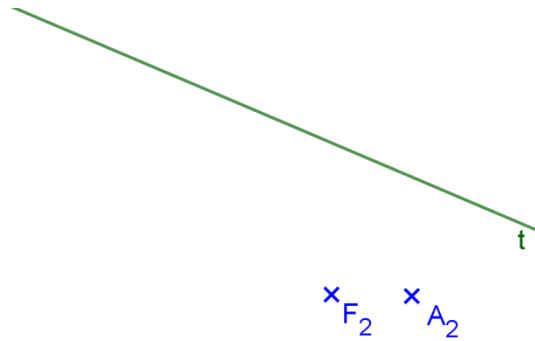
Para provar que o ponto L pertence à circunferência principal, basta utilizar a relação entre os lados correspondentes dos triângulos semelhantes $\Delta F_1F_2F'_2$ e ΔOF_2L :

$$\frac{F_1F'_2}{OL} = \frac{F_1F_2}{OF_2} \rightarrow \frac{2a}{OL} = \frac{2c}{c} \rightarrow OL = a.$$



Exercícios:

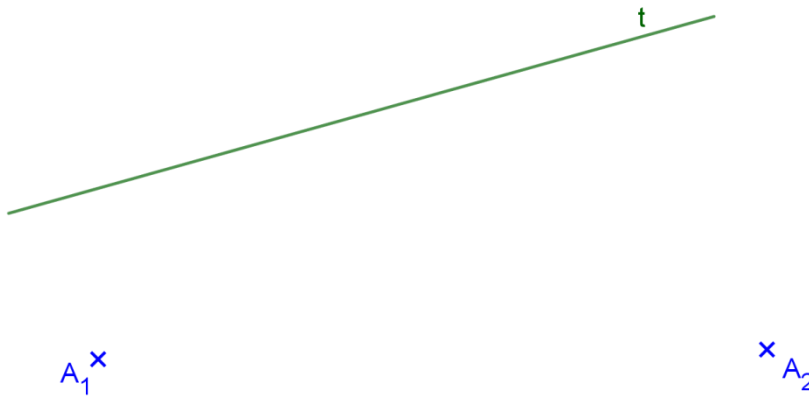
1. Determine os elementos principais da elipse, dados o vértice A_2 , o foco F_2 e a reta tangente t.



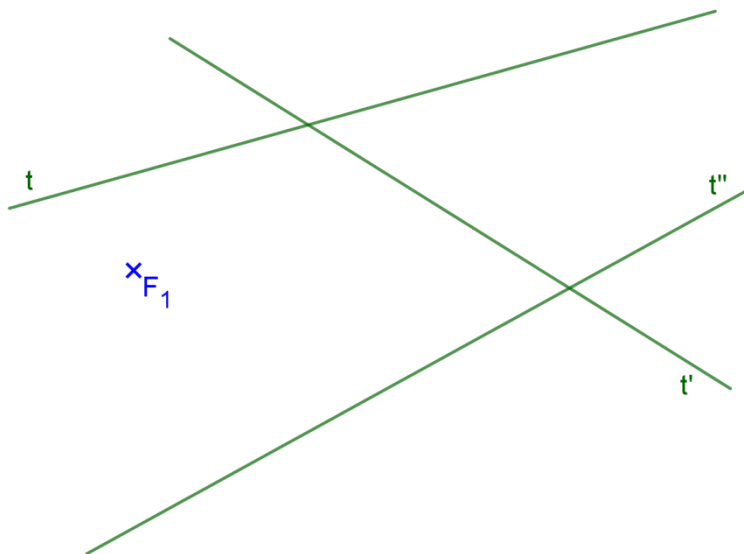
2. Determine os elementos principais da elipse, dados o vértice A_1 , o foco F_2 e a reta tangente t.



3. Determine os elementos principais da elipse, dados os vértices A_1 e A_2 e a reta tangente t .



4. Determine os elementos principais da elipse, dados o foco F_1 e as retas tangentes t , t' e t'' .



Considere um ponto P da elipse de diâmetros $2a$ e $2b$ com o centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Por definição, temos que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \quad (1)$$

Calculando as distâncias PF_1 e PF_2 , obtemos:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado, temos que:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2. \end{aligned}$$

Simplificando-se a última igualdade, temos:

$$\begin{aligned} 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xc \Rightarrow \\ a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= a^2 - xc. \end{aligned}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros, temos:

$$\begin{aligned} a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2. \end{aligned}$$

Simplificando a última igualdade, temos:

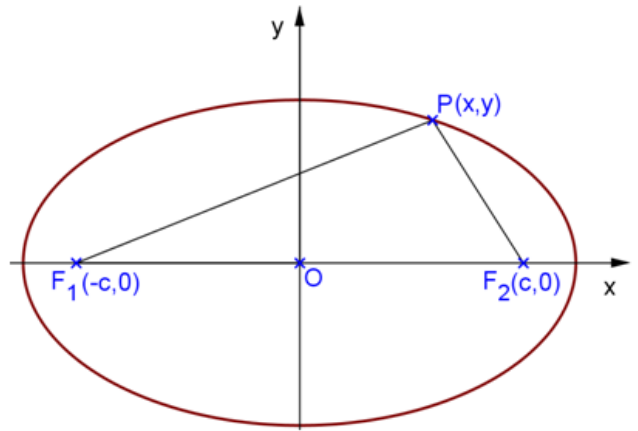
$$\begin{aligned} a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + x^2c^2. \\ a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Como na elipse temos $a^2 = b^2 + c^2$, podemos substituir na última igualdade $a^2 - c^2$ por b^2 :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da última igualdade por a^2b^2 , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Propriedade: Os pontos da circunferência principal e da elipse se correspondem segundo uma afinidade

homológica de razão $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$.

Nos triângulos $\triangle OCE$ e $\triangle ODF$ temos que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{a} = \frac{y'}{b} \Rightarrow y = a \cdot \text{sen}(\theta) \text{ e } y' = b \cdot \text{sen}(\theta).$$

Como $\triangle OCE \sim \triangle ODF$, temos que:

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{b}$$

ou seja,

$$y = y' \cdot \frac{a}{b} \tag{1}$$

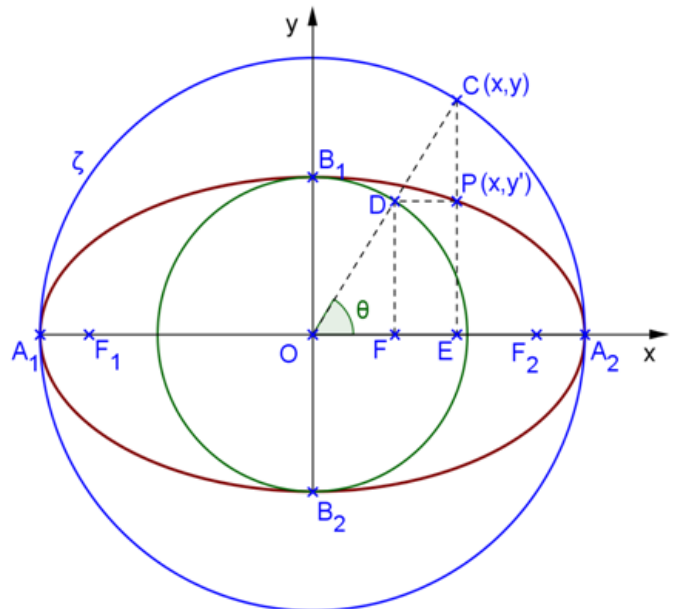
Como C pertence à circunferência principal da elipse, temos:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$x^2 + \left(y' \cdot \frac{a}{b}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y' \cdot a)^2}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, P pertence à elipse.



A excentricidade de uma elipse ou hipérbole é a razão $e = \frac{c}{a}$. No caso da elipse, temos que $c < a$, ou seja, $e < 1$.

Exercícios:

1. Determine os elementos principais da elipse, dados os vértices A_1 e A_2 e o ponto P.



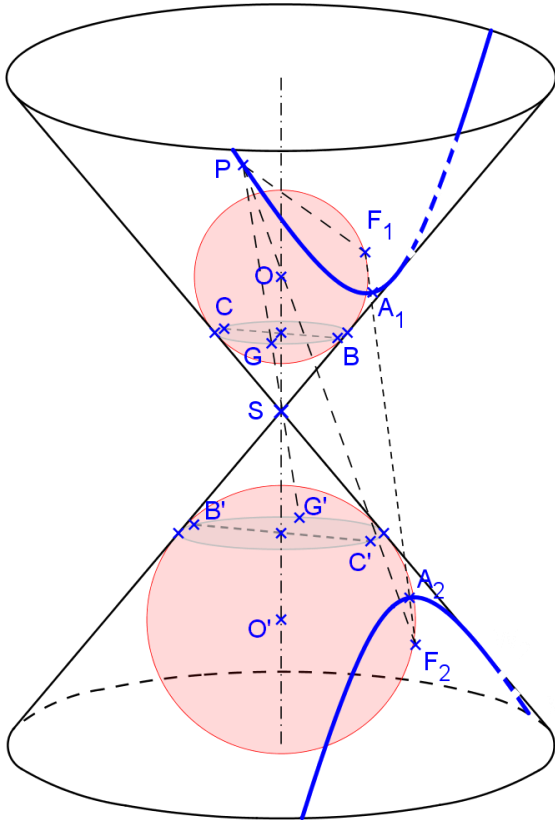
2. Determine os elementos principais da elipse, dados a excentricidade $e = \frac{2}{3}$ e o diâmetro $2c = 7,5\text{cm}$.

3. Determine os elementos principais da elipse, dados a excentricidade $e = \frac{1}{3}$ e o diâmetro $2b = 5,3\text{cm}$.

4. Determine os elementos principais da elipse, dados a excentricidade $e = \frac{4}{5}$ e o diâmetro $2a = 9,1\text{cm}$.

2.2. Hipérbole

Voltando à demonstração do teorema de Apollonius, vamos considerar que o plano secante corta as geratrizes das duas folhas da superfície cônica. A curva obtida pela seção do plano secante é chamada de **hipérbole**. Temos que os segmentos $PF_2 - PF_1 = PG' - PG = GG' = BB'$ têm uma medida constante, pois são tangentes a mesmas esferas por um mesmo ponto.



Sabemos que $BB' = A_1B' - A_1B = A_1F_2 - A_1F_1$, pois $A_1B = A_1F_1$ e $A_1B' = A_1F_2$ e são tangentes a uma esfera por um mesmo ponto. Além disso, $BB' = CC' = A_2C - A_2C' = A_2F_1 - A_2F_2$, pois $A_2C = A_2F_1$ e $A_2C' = A_2F_2$.

Logo, temos que:

$$BB' = CC' = A_1F_2 - A_1F_1 = A_2F_1 - A_2F_2.$$

Além disso, temos que:

$$BB' = CC' = A_2C - A_2C' = A_2F_1 - A_2F_2.$$

Desta identidade, podemos concluir que:

$$A_1F_1 = A_2F_2 \text{ e } A_1F_2 = A_2F_1,$$

por serem segmentos iguais de sinais contrários.

Finalmente, temos que:

$$A_2F_1 - A_1F_2 = A_1F_2 - A_2F_2 = BB' = A_1A_2.$$

Portanto,

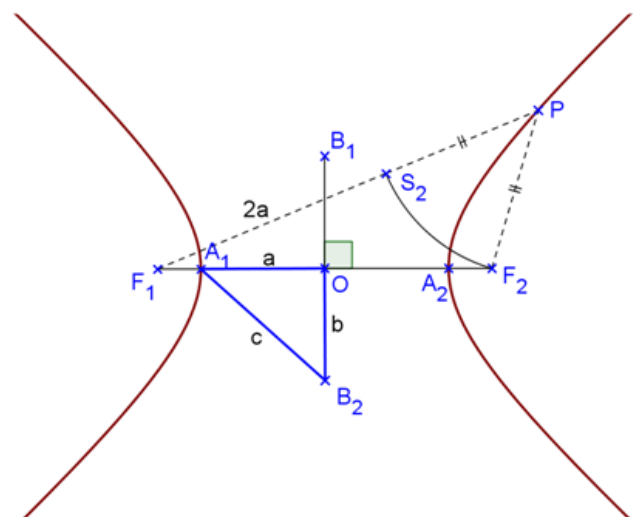
$$PF_2 - PF_1 = BB' = A_1A_2.$$

As interseções dos planos dos paralelos BC e $B'C'$ com o plano secante são as retas diretrizes da hipérbole.

Definição: Considere dois pontos F_1 e F_2 , tais que $F_1F_2 = 2c$, e uma distância $2a$, de modo que $2a < 2c$. Chama-se **hipérbole** o lugar geométrico dos pontos cujas diferenças das distâncias a F_1 e a F_2 são constantes e iguais a $2a$. Se P é um ponto da hipérbole, então $|PF_1 - PF_2| = 2a$, ou seja, $PF_1 > PF_2$ ou $PF_1 < PF_2$. Uma hipérbole é uma curva formada por dois ramos.

Elementos da hipérbole:

- a) **focos** – são os pontos F_1 e F_2 .
- b) **distância focal** – $F_1F_2 = 2c$.
- c) **eixo real ou transverso** – é a reta F_1F_2 ; é um eixo de simetria da curva.
- d) **eixo imaginário ou não-transverso** – é a mediatriz de F_1F_2 ; é um eixo de simetria da curva.
- e) **vértices** – A_1, A_2 ; onde A_1 e A_2 são os pontos de interseção da reta F_1F_2 (do eixo real) com a hipérbole.
- f) **diâmetro real, principal ou transverso** – é o segmento A_1A_2 .
- g) **centro** – é o ponto O , médio de F_1F_2 . O centro O é



um centro de simetria da curva.

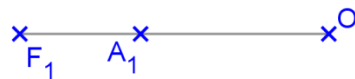
- h) **diâmetro imaginário, secundário ou não-transverso** – no eixo imaginário existem dois pontos, B_1 e B_2 , cujas distâncias aos vértices são iguais a c . O segmento B_1B_2 é o diâmetro imaginário.

Propriedades:

1. $F_1A_1 = A_2F_2$.
2. Por convenção adota-se a medida do diâmetro imaginário $B_1B_2 = 2b$. Assim, $c^2 = a^2 + b^2$.

Exercícios:

1. Construa os diâmetros real e imaginário de uma hipérbole, dados F_1 , A_1 e O . Construa a hipérbole por pontos.



2. Construa os diâmetros real e imaginário de uma hipérbole, dados F_1 , F_2 e um ponto P da curva.



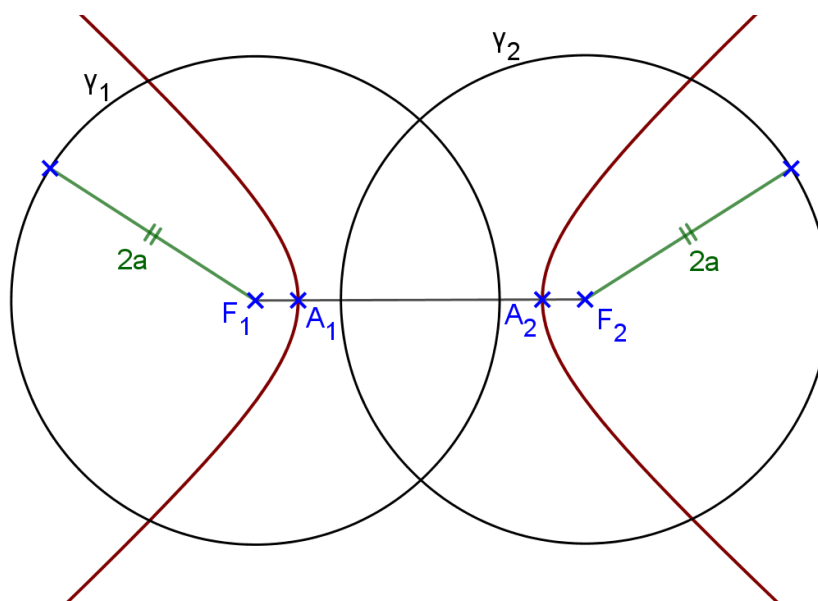
3. Determine os elementos principais da hipérbole, dados a excentricidade $e = \frac{3}{2}$ e o diâmetro $2b = 5,3\text{cm}$.

4. Dados o foco F_1 e os pontos P_1 e P_2 , simétricos em relação ao eixo imaginário, construa os diâmetros real e imaginário da hipérbole.

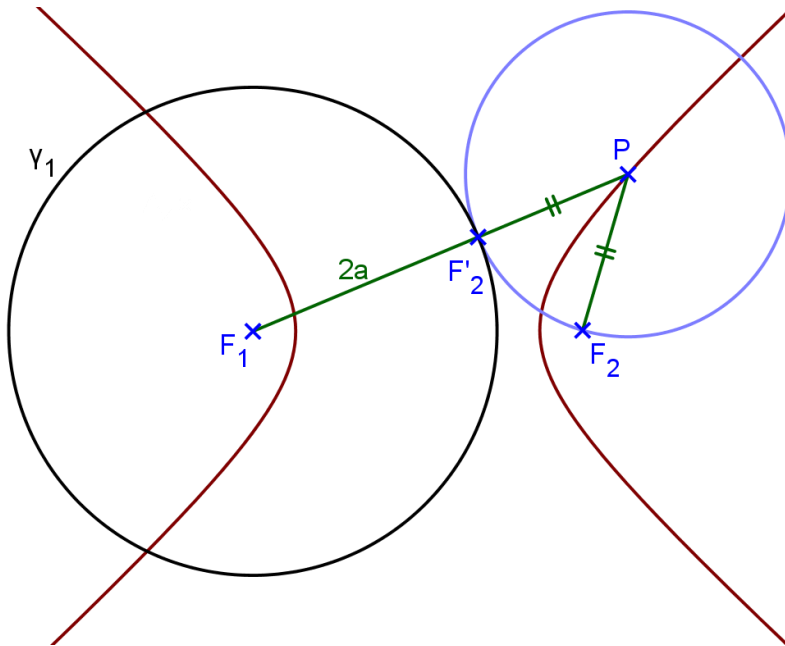


5. Determine os elementos principais da hipérbole, dados a excentricidade $e = \frac{5}{2}$ e $2a = 4,5\text{cm}$.
6. Determine os elementos principais da hipérbole, dados a excentricidade $e = \frac{6}{5}$ e $2c = 6,3\text{cm}$.

Definição: As duas circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a $2a$ são chamadas de **circunferências diretrizes** da hipérbole. A circunferência diretriz γ_1 de centro F_1 é relativa ao foco F_1 , e a outra γ_2 relativa ao foco F_2 .

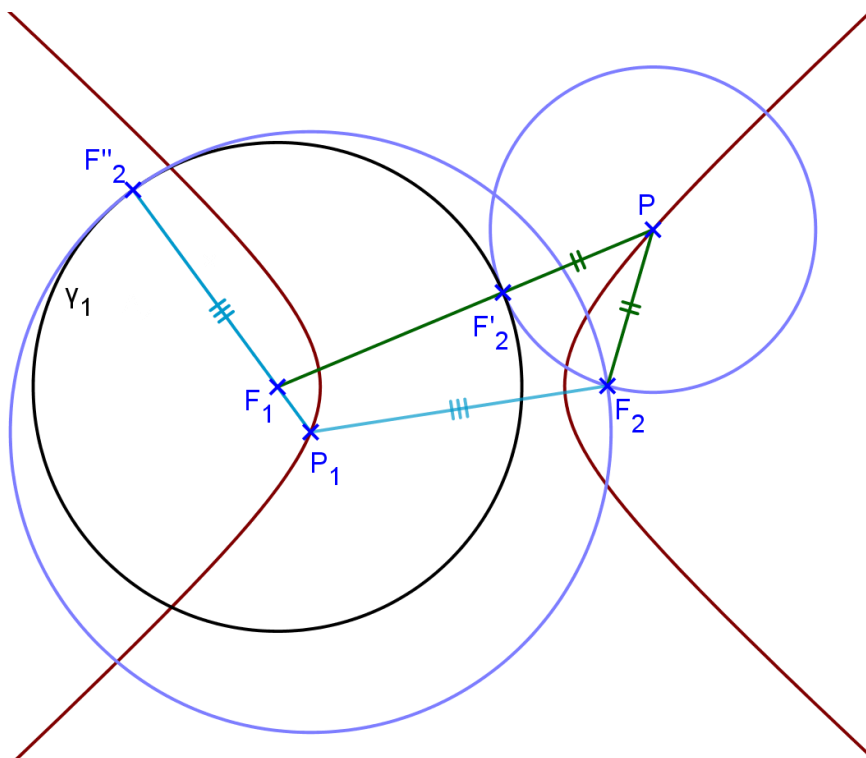


Propriedade: $PF_2 = PF'_2$



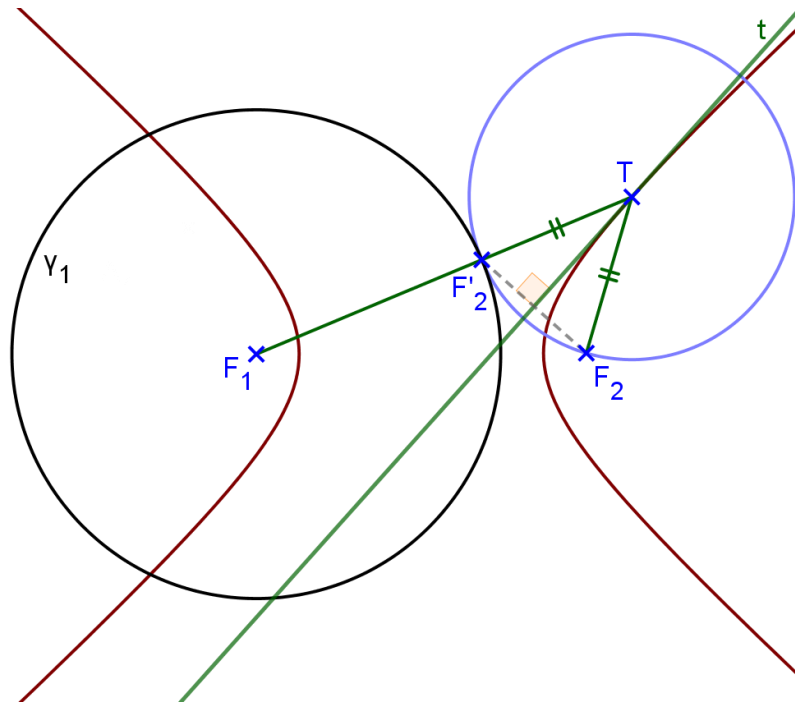
Note que é o mesmo que: toda circunferência que tem o centro num ponto qualquer de uma hipérbole e passa por um foco da mesma é tangente internamente à circunferência diretriz do outro foco. Logo, temos uma nova definição para a hipérbole.

Definição: Dados uma circunferência γ_1 de centro F_1 e um ponto F_2 no seu exterior, denomina-se **hipérbole** o lugar geométrico dos centros P das circunferências que passam por F_2 e tangenciam γ_1 .



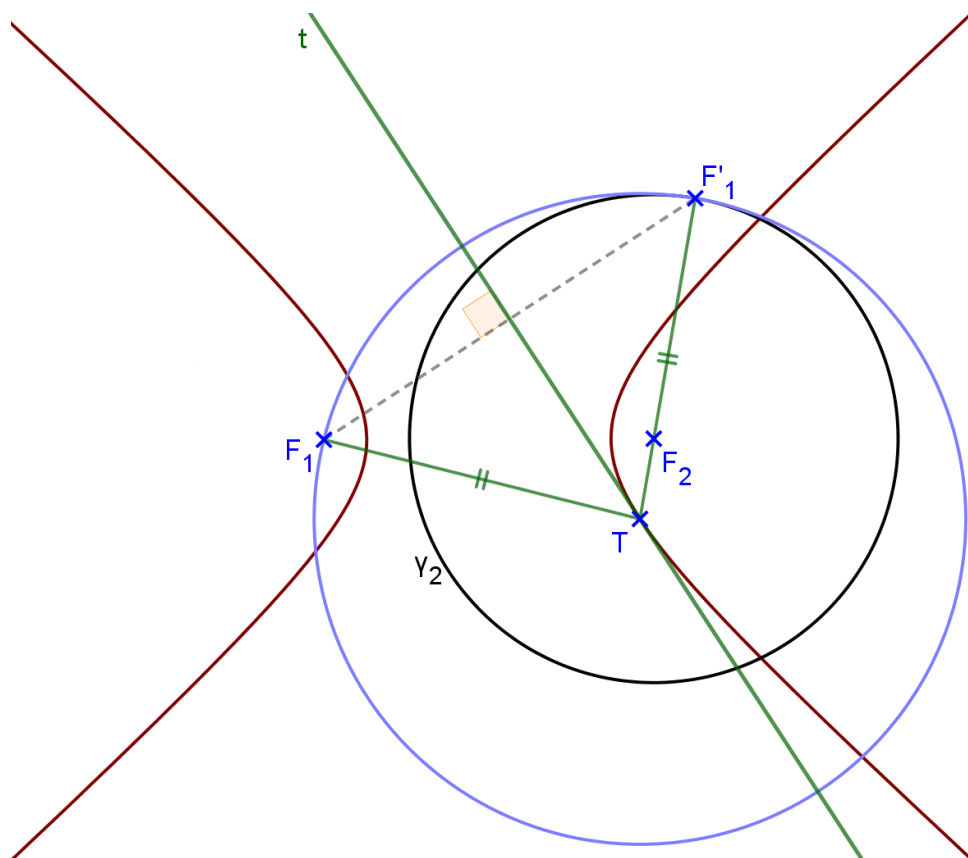
O mesmo raciocínio vale para a circunferência γ_2 : a **hipérbole** é o lugar geométrico dos centros P das circunferências que passam por F_1 e tangenciam γ_2 .

Propriedade: uma reta e uma hipérbole são tangentes quando, e somente quando, o simétrico de qualquer dos dois focos da hipérbole em relação à reta pertence à circunferência diretriz relativa ao outro foco.



Observações

- a reta tangente t é a mediatriz de $F_2F'_2$, onde F'_2 é o simétrico de F_2 em relação a reta t ;
- F_1 , T e F'_2 estão alinhados.

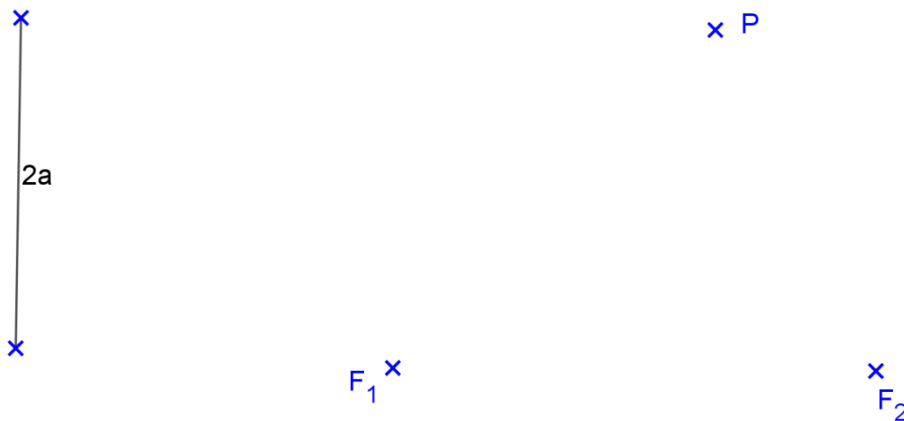


Observações

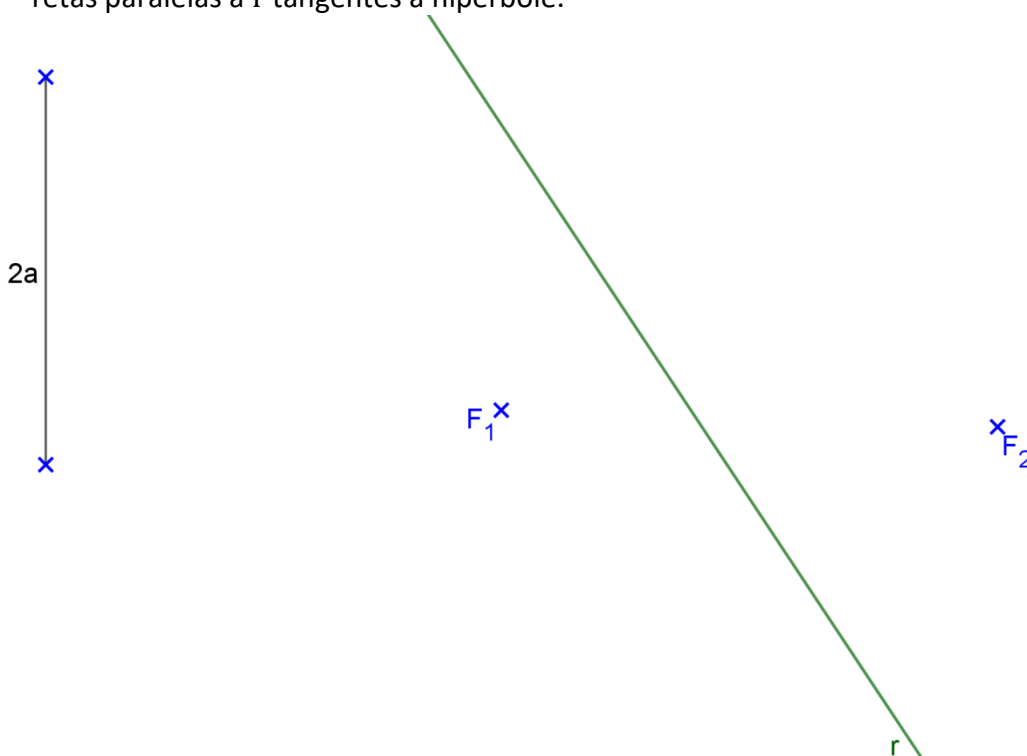
- a reta tangente t é a mediatriz de $F_1F'_1$, onde F'_1 é o simétrico de F_1 em relação a reta t ;
- F_2 , T e F'_1 estão alinhados.

Exercícios:

1. São dados os focos, o comprimento do diâmetro real de uma hipérbole $2a$ e um ponto P externo à curva. Construa pelo ponto P as retas tangentes à hipérbole e determine os pontos de tangência.



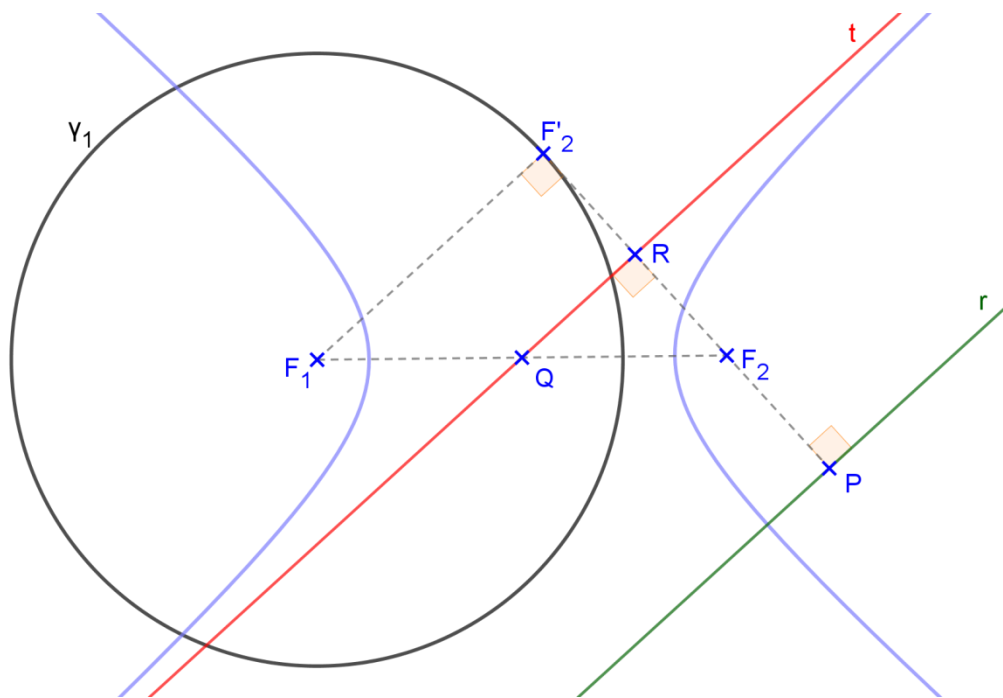
2. São dados os focos, o comprimento do diâmetro real de uma hipérbole $2a$ e uma reta r . Construa as retas paralelas a r tangentes à hipérbole.



A reta PF_2 , perpendicular à reta r pode ser secante à circunferência diretriz γ_1 (admitindo duas soluções), exterior (não admitindo solução) ou tangente a γ_1 .

Quando PF_2 for tangente a γ_1 , a reta tangente à hipérbole será a mediatriz de $F_2F'_2$. Porém, temos que $PF_2 \perp F_1F'_2$ (pois PF_2 é tangente a γ_1), ou seja, a solução $t \parallel F_1F'_2$. Como $F_1F'_2$ deve intersectar t no ponto de tangência, neste caso, não existe ponto de tangência (ou dizemos que é um

ponto impróprio, que tem a direção da reta t). Assim, a reta t tem a propriedade fundamental da tangência, isto é, o simétrico de qualquer foco em relação a t pertence a circunferência diretriz relativa ao outro foco, mas o ponto de tangência não existe (ou seja, é impróprio).

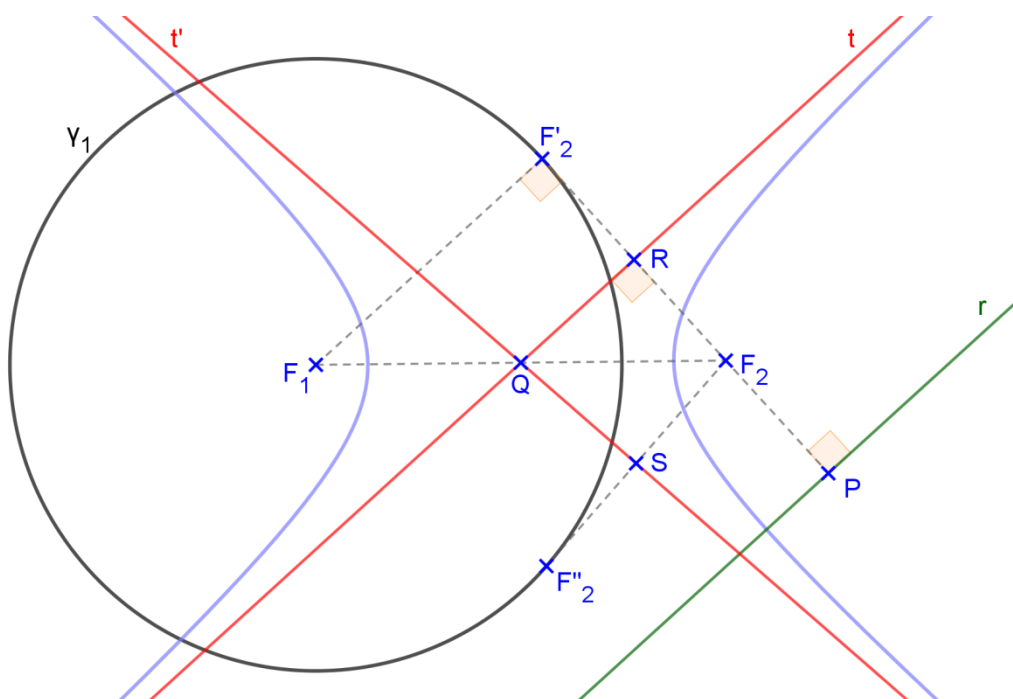


Definição: Suponha que um ponto M percorra a hipérbole, afastando-se indefinidamente sobre ela num determinado sentido, então a distância de M à reta t tende a zero, e a reta t denomina-se **assíntota** da hipérbole.

Propriedade: As assíntotas de uma hipérbole passam pelo centro da mesma.

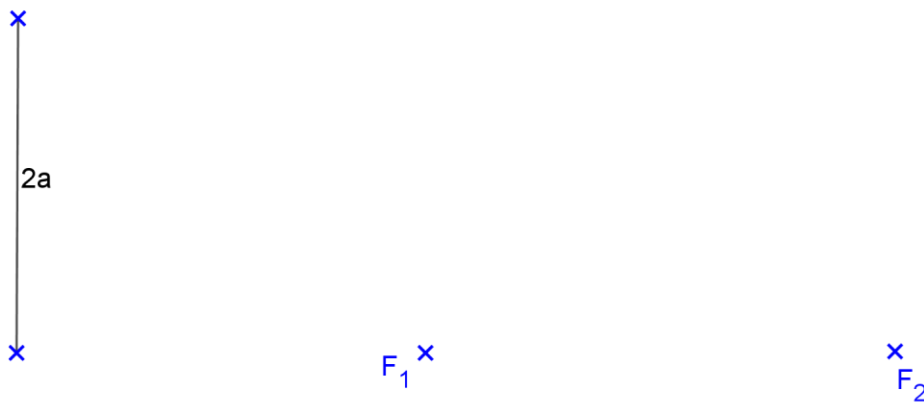
Como os triângulos $\Delta F_1F_2F'_2$ e ΔQF_2R são semelhantes, temos que $QF_2 = QF_1$, pois $RF_2 = RF'_2$. Logo, o ponto Q será o centro da hipérbole. Podemos concluir também que $QR = \frac{F_1F'_2}{2} = a$.

A hipérbole admite uma segunda assíntota, pois de F_2 é possível traçar outra reta tangente a γ_1 , determinando o ponto F''_2 . A mediatriz de $F_2F''_2$ é também uma assíntota.

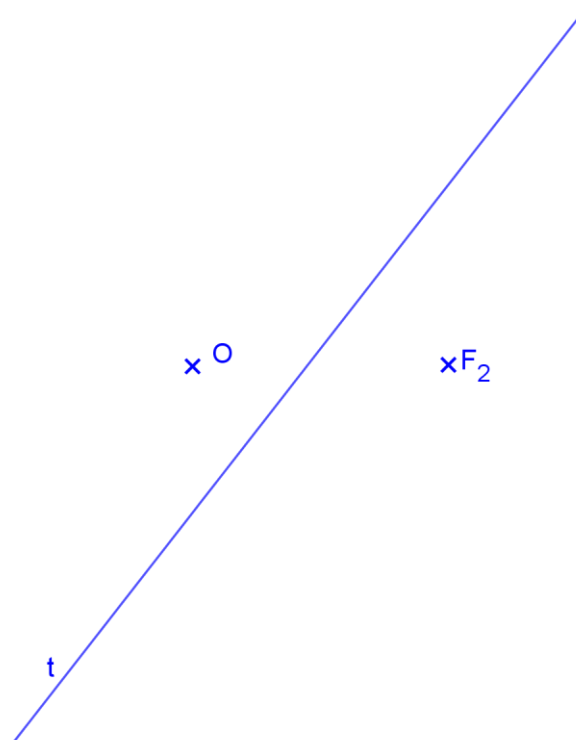


Exercícios:

1. Determine as assíntotas da hipérbole, dada pelos focos F_1 e F_2 e o diâmetro real $2a$.



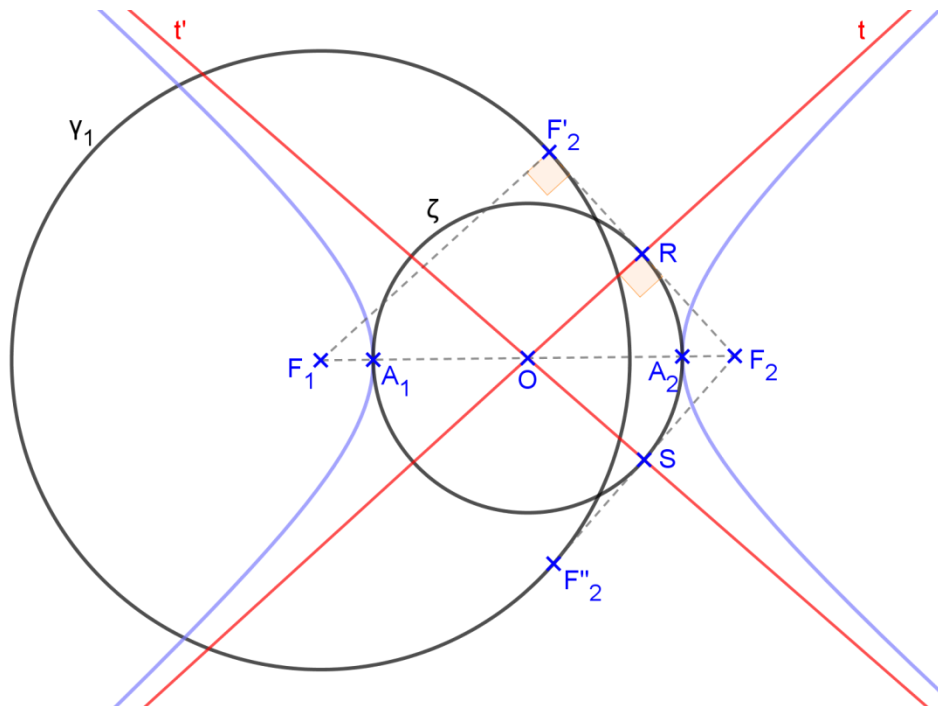
2. Determine os elementos principais da hipérbole dada pelo foco F_2 , o centro O e a reta tangente t . Encontre os elementos principais da hipérbole conjugada desta hipérbole.



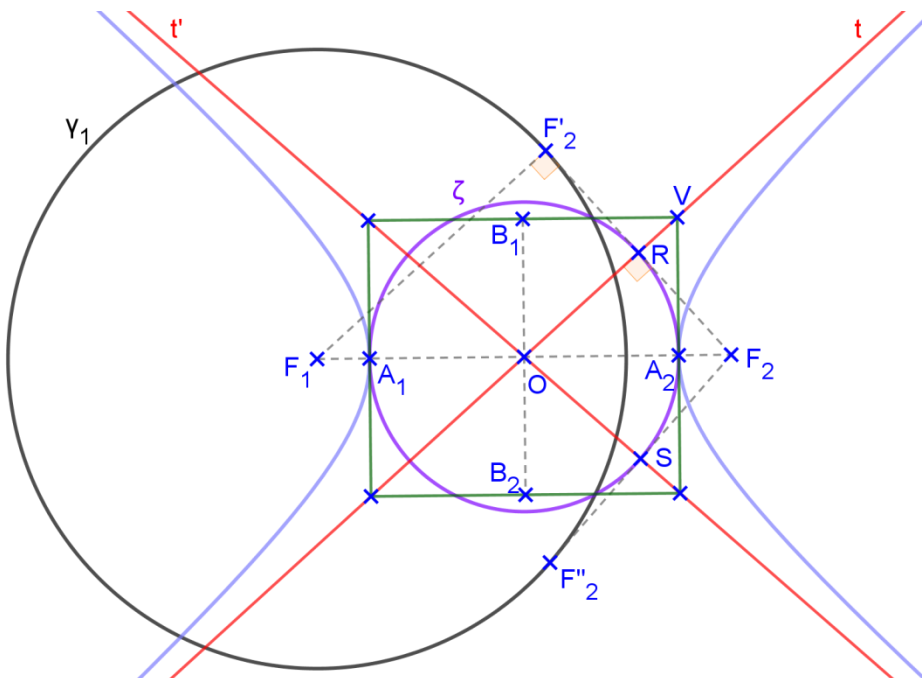
3. Determine os elementos principais da hipérbole equilátera, com diâmetro real $2a = 5,3\text{cm}$.

Definição: A circunferência principal de uma hipérbole tem centro em O e raio a .

De acordo com as propriedades que vimos sobre as retas assíntotas, podemos concluir que os pés das perpendiculares aos segmentos $F_2F'_2$ e $F_2F''_2$ pertencem à circunferência principal da hipérbole.



Propriedade: Sejam A_1A_2 e B_1B_2 os diâmetros real e imaginário de uma hipérbole, respectivamente. Considere o retângulo que se obtém traçando-se por A_1 e A_2 as paralelas a B_1B_2 e, por B_1 e B_2 as paralelas a A_1A_2 . Então, as assíntotas da hipérbole contêm as diagonais do retângulo considerado.



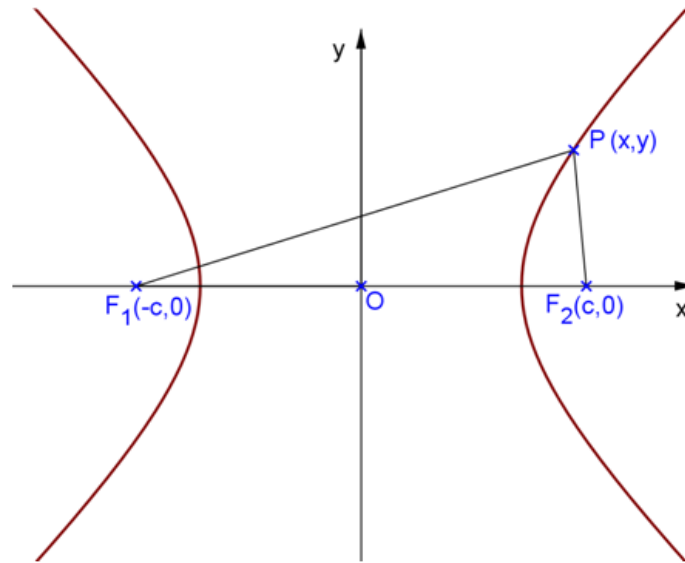
Da congruência dos triângulos ΔVB_1O e ΔROF_2 , podemos concluir que $RF_2 = b$ e $OV = c$. Logo, o vértice V pertence à assíntota t . O mesmo vale para os outros vértices do retângulo.

Seja um ponto P sobre a hipérbole de diâmetros $2a$ e $2b$, com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Vamos determinar a equação desta hipérbole. Por definição, se P pertence à hipérbole, então:

$$PF_1 - PF_2 = 2a. \quad (1)$$

Mas as distâncias entre P e os focos F_1 e F_2 são:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ e } PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (2)$$



Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (3)$$

Elevando-se ambos os membros de (3) ao quadrado, obtemos:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Simplificando-se a última igualdade, temos que:

$$4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4xc - 4a^2 \Rightarrow a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = xc - a^2. \quad (4)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros de (4), obtemos:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4. \quad (5)$$

Simplificando-se (5), obtemos:

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (6)$$

Como na hipérbole vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$, podemos substituir em (6) $c^2 - a^2$ por b^2 :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (7)$$

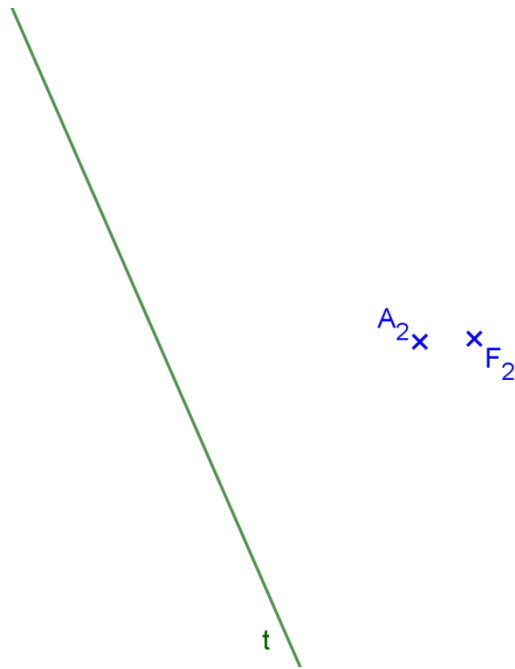
Dividindo ambos os membros de (7) por a^2b^2 , obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

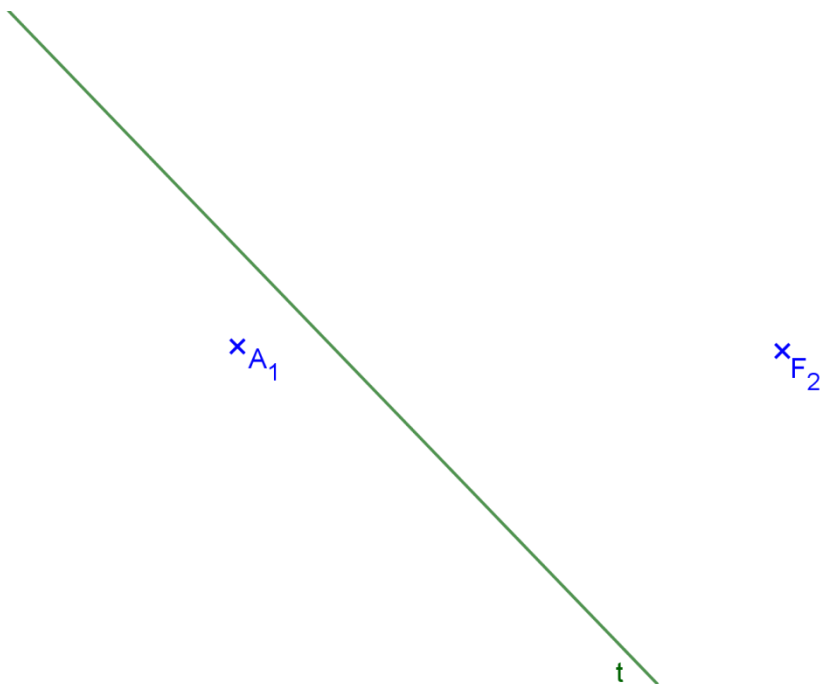
que é a equação da hipérbole de semi-diâmetros a e b , com o centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Exercícios:

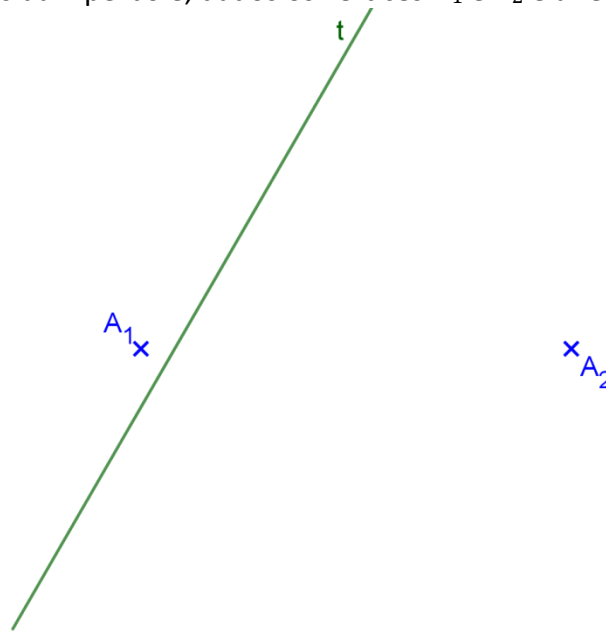
1. Determine os elementos principais da hipérbole, dados o vértice A_2 , o foco F_2 e a reta tangente t .



2. Determine os elementos principais da hipérbole, dados o vértice A_1 , o foco F_2 e a reta tangente t .

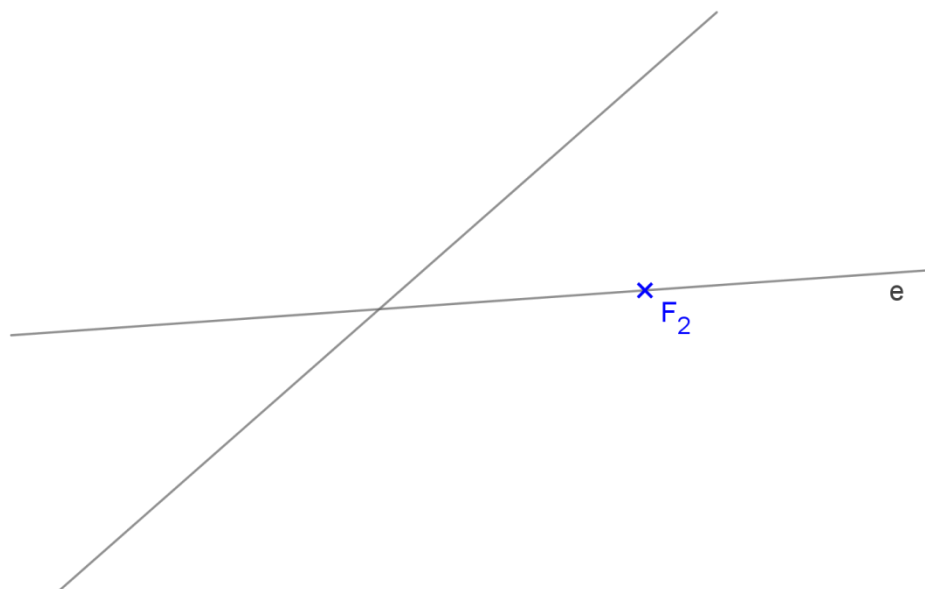


3. Determine os elementos principais da hipérbole, dados os vértices A_1 e A_2 e a reta tangente t .



4. Construa os elementos principais e as assíntotas da hipérbole com diâmetros $2a = 5,3\text{cm}$ e $2b = 4\text{cm}$.

5. Construa os elementos principais de uma hipérbole, dados um foco, o eixo real e uma assíntota.



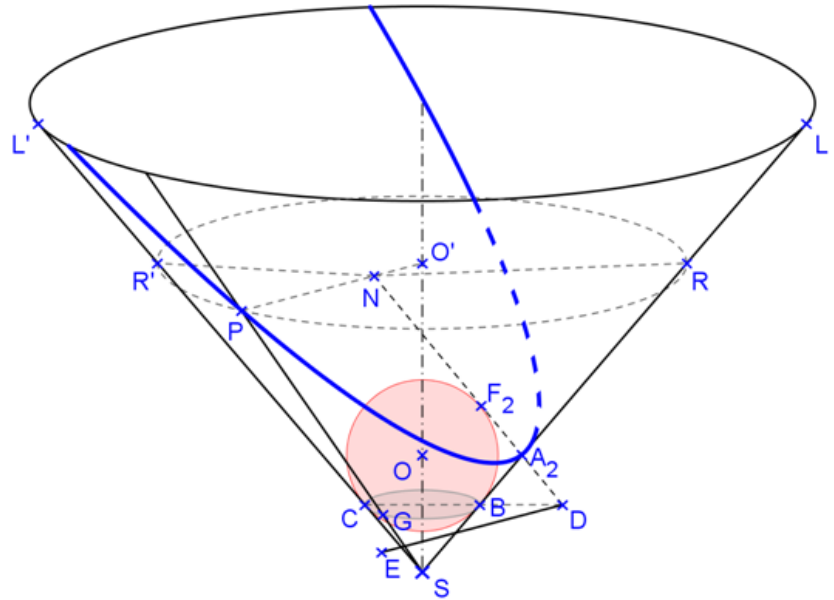
2.3. Parábola

Voltando à demonstração do teorema de Apollonius, vamos considerar que o plano secante seja paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica. A curva obtida pela seção do plano secante é chamada de **parábola**.

Construindo o plano LSL' perpendicular ao plano secante, SL' será a geratriz paralela a este plano. O traço do plano secante no plano LSL' será A₂F₂.

Construindo no plano LSL' a circunferência de centro O, tangente às geratrizes principais em B e C e à reta A₂F₂ no ponto F₂ e girando-se a figura em torno do eixo OS, a esfera descrita pela circunferência de centro O será tangente ao cone segundo o paralelo BC e toca em F₂ o plano secante.

Considere um ponto qualquer P sobre a curva de seção. Construa a reta PF₂ e a geratriz SP que corta em G o paralelo BC da superfície do cone. Construa o paralelo RR' do cone que passa por P e intersecta o plano secante em PN, onde N pertence à reta A₂F₂.



Temos sempre que PF₂ = PG, pois são tangentes a uma esfera pelo mesmo ponto P. Podemos verificar por uma rotação em torno do eixo do cone que PG = BR. A interseção do plano secante e do paralelo BC é uma reta DE perpendicular ao plano LSL' e ND é a distância do ponto P à reta DE.

Como os triângulos A₂NR e A₂BD são isósceles e ambos semelhantes ao triângulo SLL', podemos concluir que ND = BR, ou seja, PF₂ = ND e conseqüentemente,

$$PF_2 = PE.$$

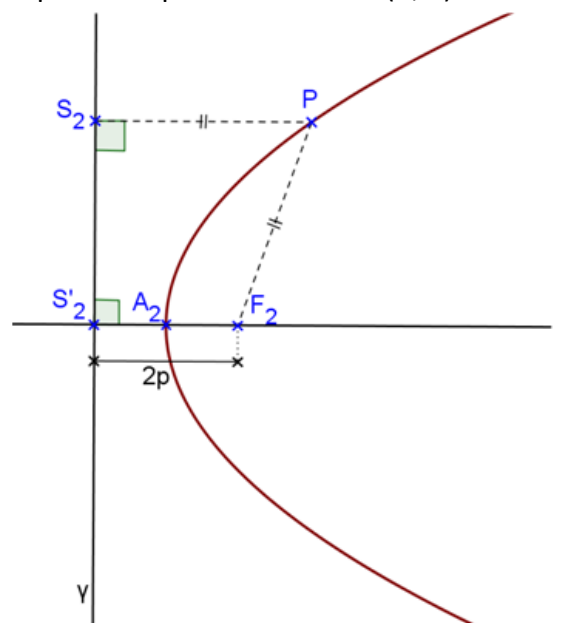
Esta é a relação que determina a parábola que tem diretriz DE, foco F₂ e vértice A₂.

Definição: Considere uma reta γ e um ponto F₂ não pertencente a γ . Denomina-se **parábola** o lugar geométrico dos pontos equidistantes de F₂ e de γ . Se P é um ponto da parábola então $d(P, \delta) = PF_2$.

Elementos da parábola:

- a) **foco** – é o ponto F₂.
- b) **diretriz** – é a reta γ .
- c) **eixo** – é a reta conduzida pelo foco F₂ perpendicularmente à diretriz γ ; é um eixo de simetria.
- d) **vértice** – A₂ é o ponto de interseção do eixo com a parábola.
- e) **parâmetro** – 2p é a distância do foco à diretriz.

Propriedade: A₂ é o ponto médio de F₂S'₂.

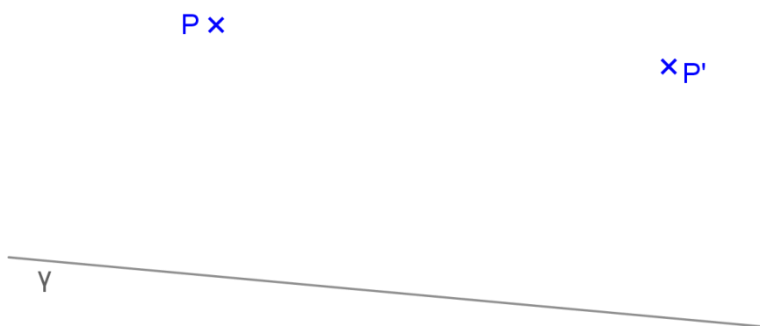


Exercícios:

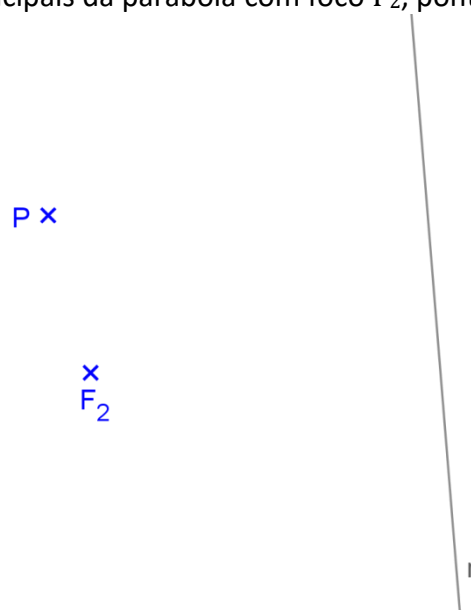
1. Construa os elementos principais da parábola com foco F_2 e o vértice A_2 . Construa pontos da curva.



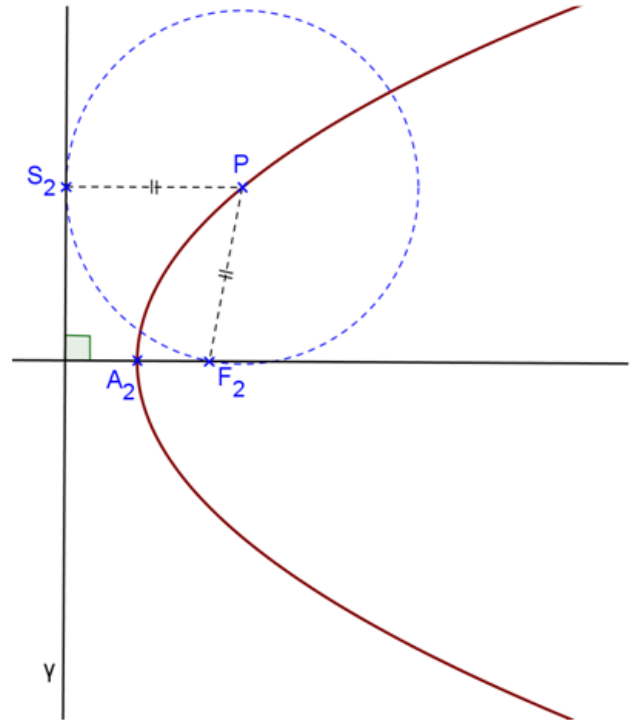
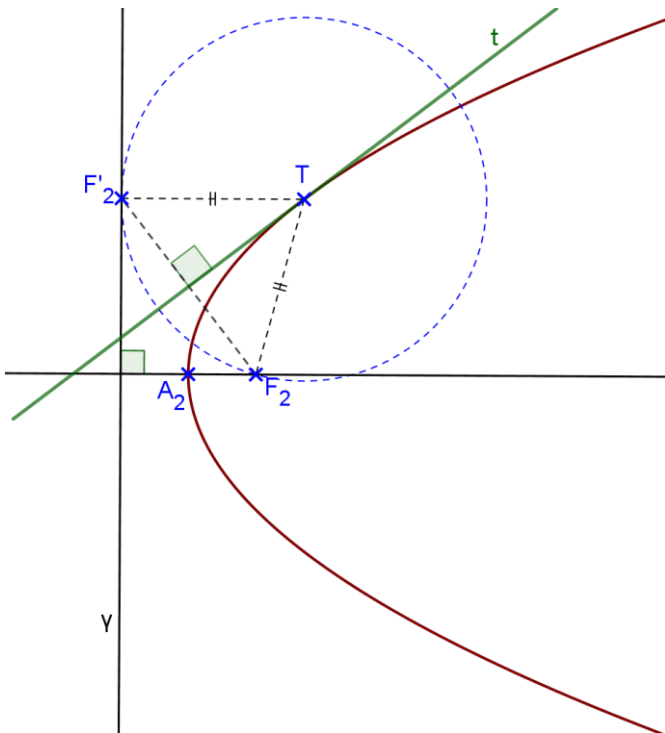
2. Construa os elementos principais da parábola com diretriz γ e os pontos P e P' simétricos em relação ao eixo e .



3. Construa os elementos principais da parábola com foco F_2 , ponto P e a direção r da diretriz.



Definição: Assim como ocorre com a elipse e a hipérbole, podemos definir a **parábola** como o lugar geométrico dos centros de circunferências que passam pelo foco F_2 e são tangentes à diretriz γ .



Propriedade: Uma reta t e uma parábola são tangentes quando, e somente quando, o simétrico do foco em relação à reta t pertence à diretriz.

Observações:

- a reta tangente t é a mediatriz de $F_2F'_2$, onde F'_2 é o simétrico de F_2 em relação à reta t ;
- $F'_2T \perp \gamma$.

Considere um ponto P sobre a parábola de foco F_2 e diretriz γ , com o vértice A_2 na origem do sistema de coordenadas cartesianas e o eixo coincidente com o eixo x . Por definição, se P pertence à parábola, então:

$$PF_2 = \text{dist}(P, \gamma) = PS_2. \tag{1}$$

Mas as distâncias entre P e F_2 e entre P e γ são:

$$PF_2 = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \text{ e } \text{dist}(P, \gamma) = x + p \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$x + p = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}. \tag{3}$$

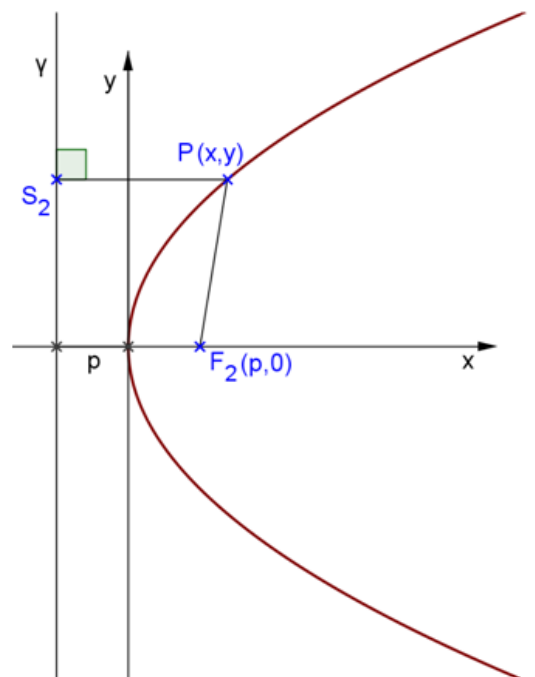
Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (3) obtemos:

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + 2xp + p^2 = x^2 - 2xp + p^2 + y^2.$$

Simplificando a equação obtida, temos que:

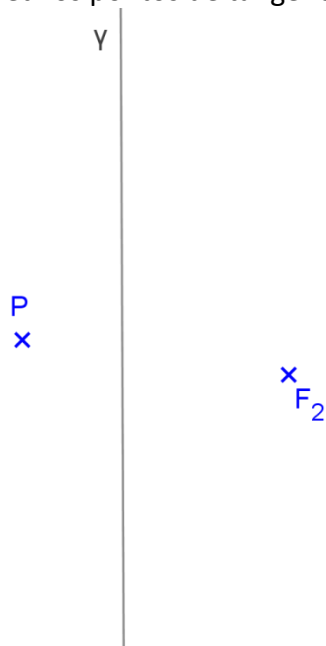
$$2xp = -2xp + y^2 \Rightarrow y^2 = 4xp,$$

que é a equação da parábola com o vértice na origem e o eixo coincidente com o eixo x .

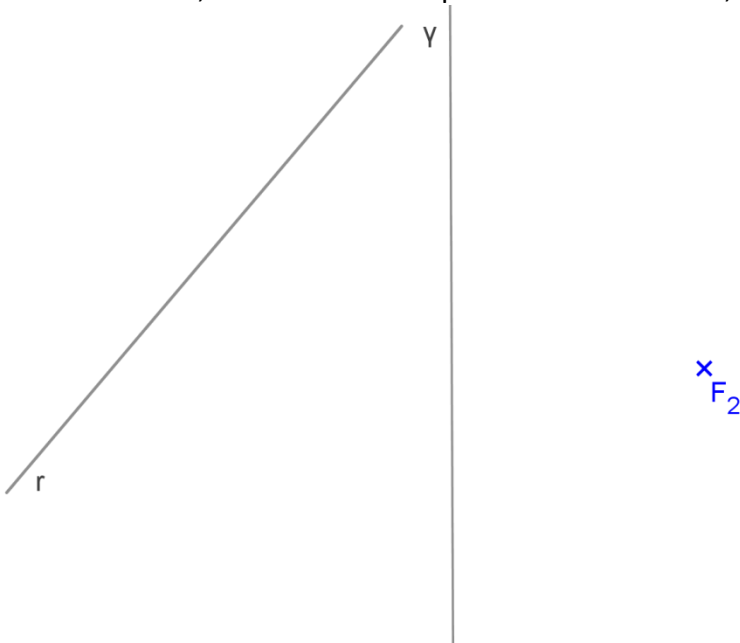


Exercícios:

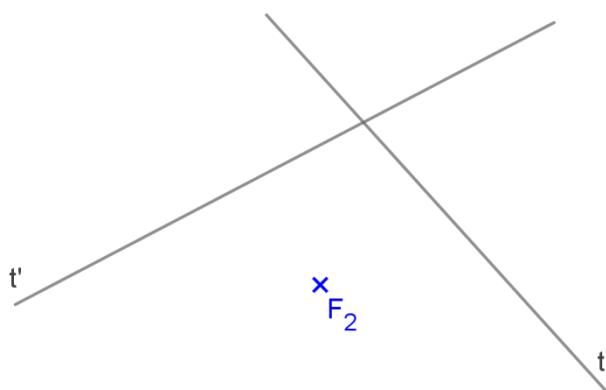
1. Dados o foco e a diretriz de uma parábola, construa pelo ponto P as retas tangentes à parábola. Determine os respectivos pontos de tangência.



2. Dados o foco, a diretriz de uma parábola e uma reta r, trace a reta paralela a r e tangente à parábola.

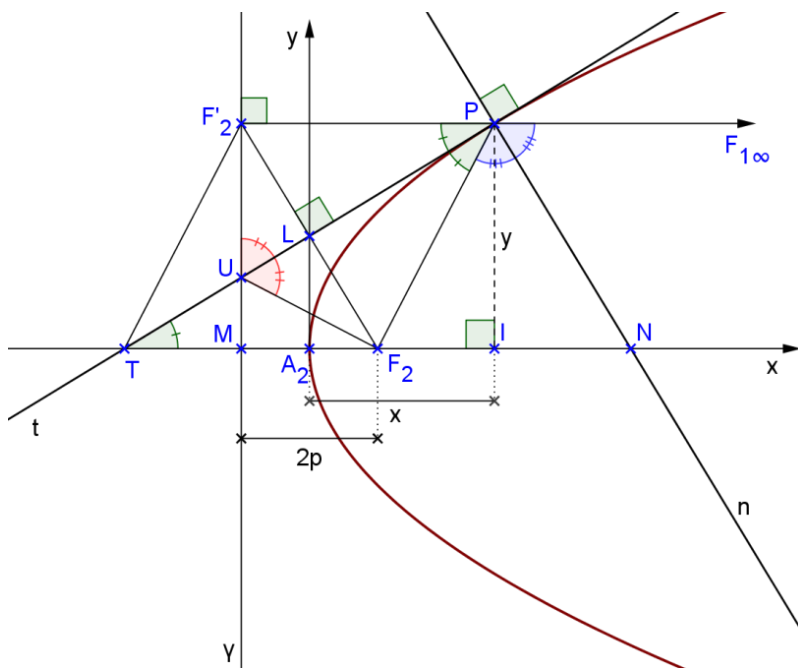


3. Construa os elementos principais da parábola com foco F₂ e retas tangentes t e t'.



Nomenclatura:

- PT - comprimento da reta tangente
- PN - comprimento da reta normal
- TI - sub-tangente
- IN - sub-normal

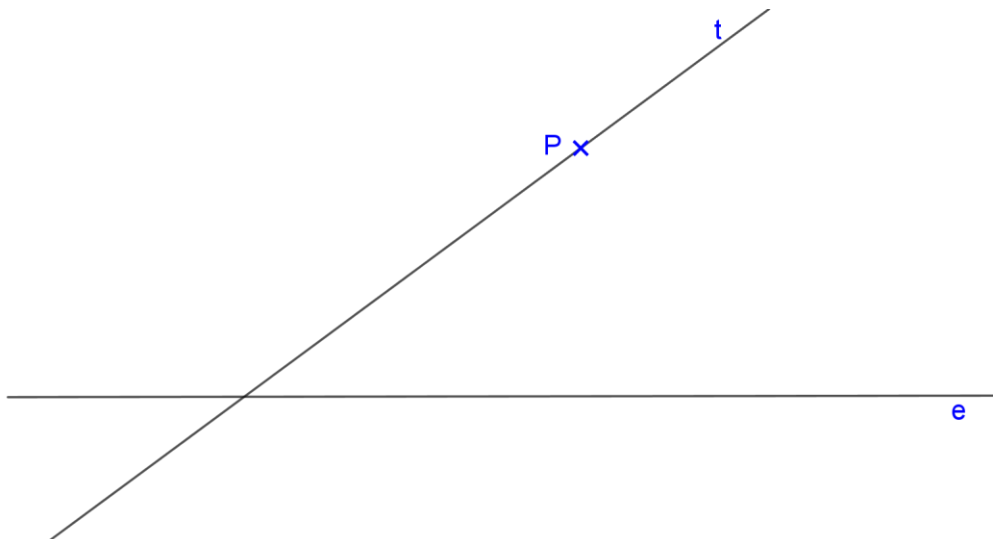


Propriedades:

1. O quadrilátero TF_2PF_2 é losango.
2. O quadrilátero F_2PNF_2 é paralelogramo.
3. A sub-normal IN é constante.
4. A sub-tangente mede o dobro da abscissa x do ponto de tangência.
5. A ordenada y do ponto de tangência P é média geométrica entre as respectivas sub-tangente e sub-normal.

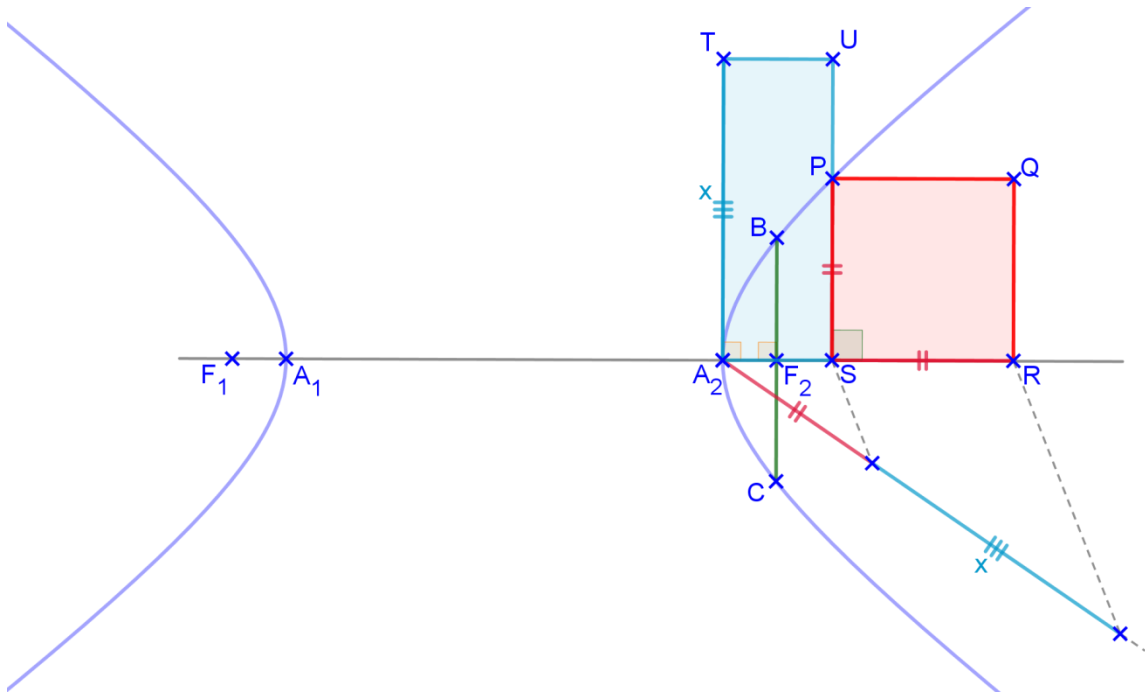
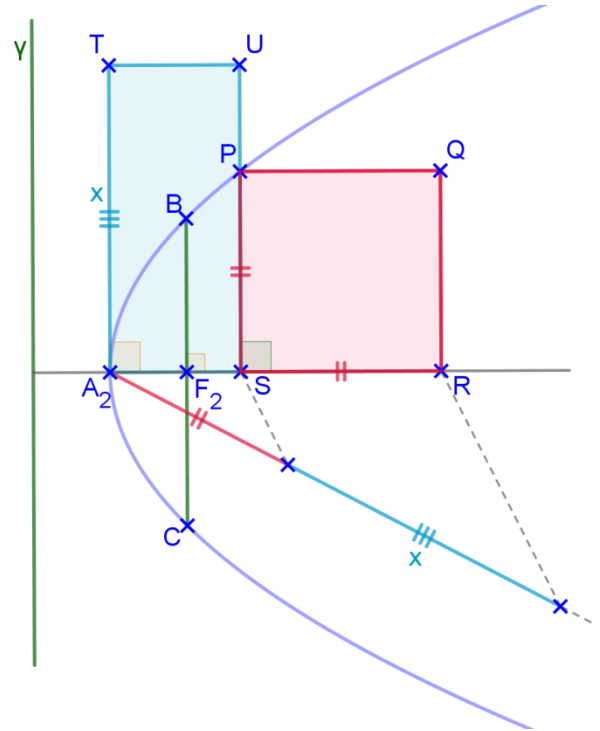
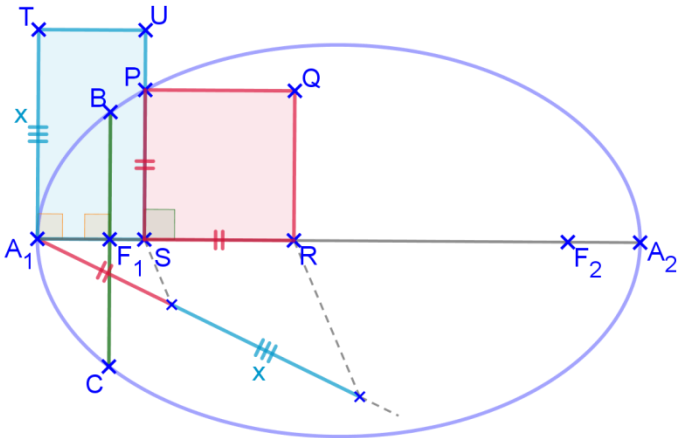
Exercícios:

1. Dados o eixo, uma reta tangente t e um ponto P pertencente à parábola e à reta t , determine os elementos principais desta parábola.



2. Determine os elementos principais de uma parábola dada pelos segmentos $TI = 6,2\text{cm}$ (sub-tangente) e $IN = 2,5\text{cm}$ (sub-normal).

Definição de Apollonius para as cônicas: Considere os pontos B e C da cônica, tais que BC passa por um dos focos e é perpendicular ao eixo principal da cônica. Seja um ponto P qualquer da cônica, e o quadrado com lado igual à PS, onde S é a projeção ortogonal de P sobre o eixo principal da cônica. Os segmentos A_1S e A_1T (ou A_2S e A_2T) são os lados do retângulo equivalente a este quadrado. Se $A_1T < BC$, a cônica é uma elipse (falta); se $A_2T = BC$, a cônica é uma parábola (igualdade); e se $A_1T > BC$, a cônica é uma hipérbole (excesso).

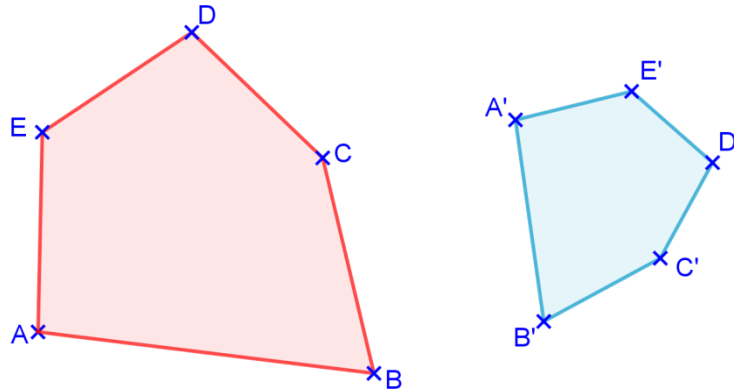


PARTE III – MÉTODOS GEOMÉTRICOS

3.1. Homotetia

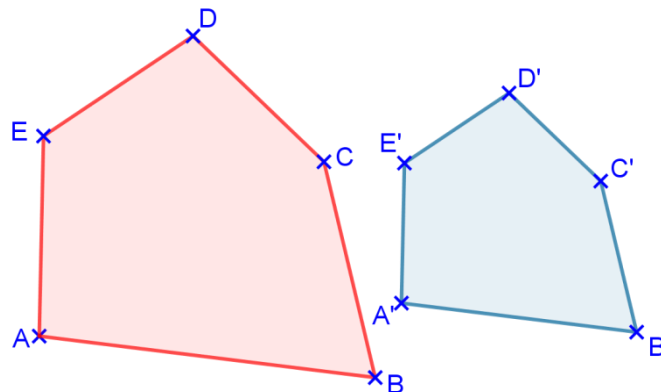
Definição: duas figuras são **semelhantes** se:

- os ângulos homólogos (que ocupam o mesmo lugar nas figuras) são ordenadamente iguais; e
- os segmentos homólogos são proporcionais segundo uma mesma razão.



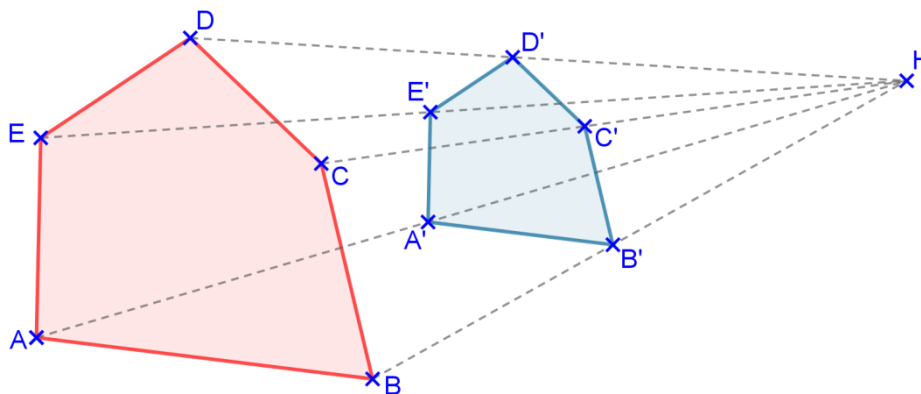
Temos que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'C'}{AC} = \dots = k$, sendo k denominada de **razão de semelhança**.

Definição: Duas figuras são **homotéticas** quando são semelhantes e, além disso, têm os segmentos homólogos paralelos.



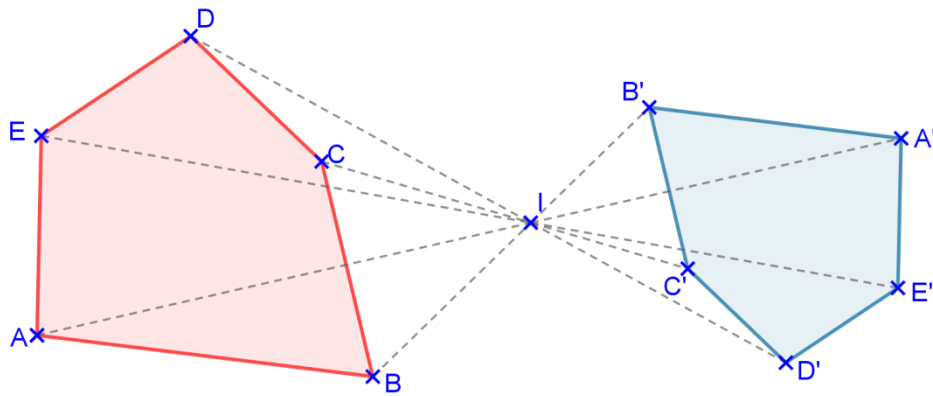
Os centros de homotetia podem ser diretos ou inversos.

1. Centro de homotetia direto H.



Nos casos de homotetia direta, a razão k é considerada positiva.

2. Centro de homotetia inverso I.

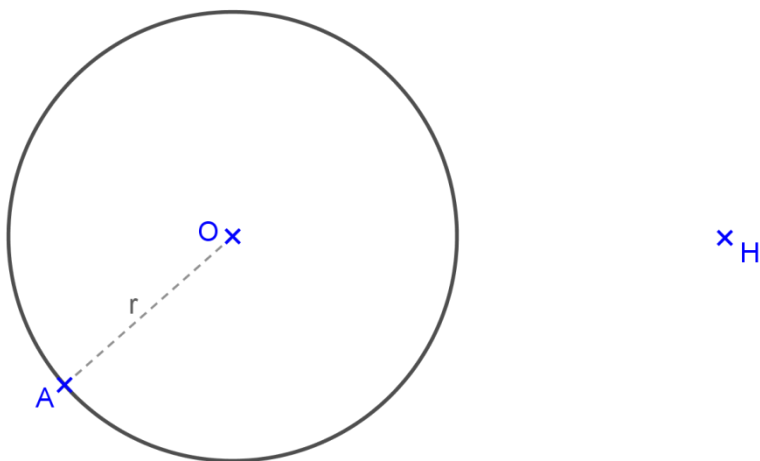


Nos casos de homotetia inversa, a razão k é considerada negativa.

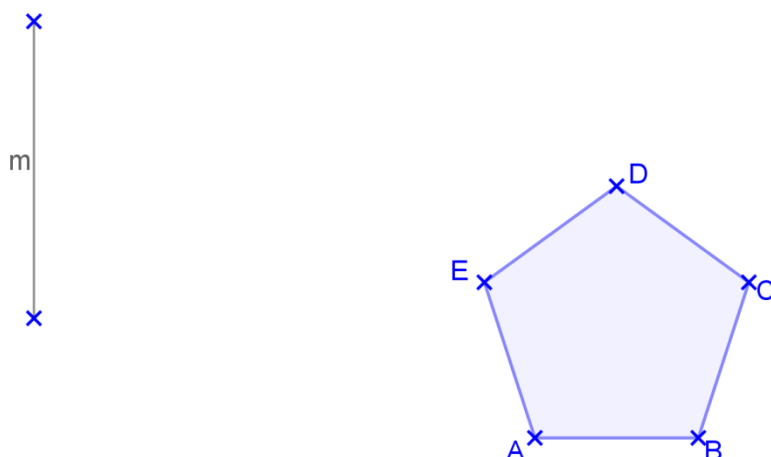
As retas que unem os pontos homólogos incidem todas no mesmo ponto H ou I , conforme a homotetia seja direta ou inversa. Os pontos H e I são chamados de centros de homotetia.

Exercícios:

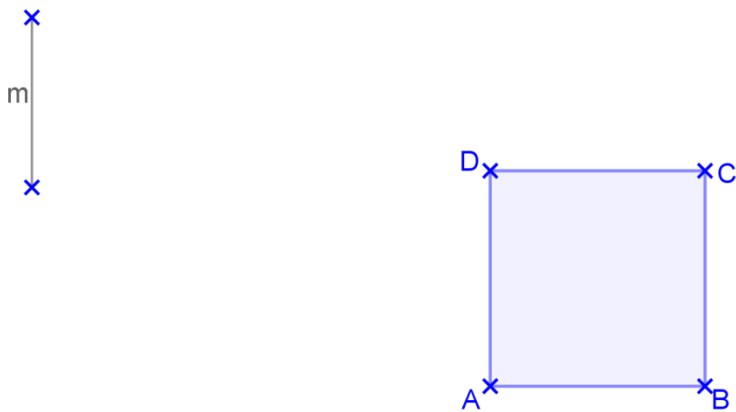
1. Multiplique a circunferência de centro O e raio r por k com centro de homotetia em H . Considere $k = -\frac{2}{3}$, $k = \frac{1}{2}$ e $k = -1$.



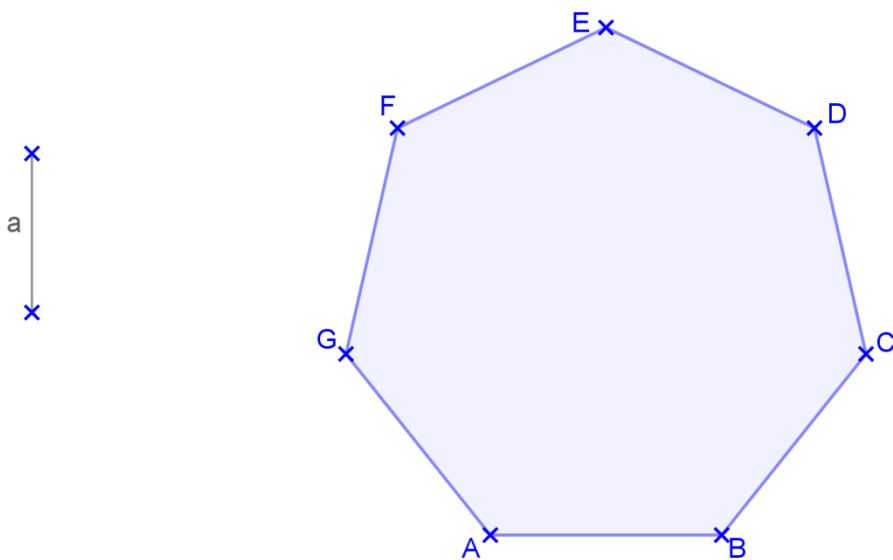
2. Multiplique o pentágono regular dado de tal forma que seu lado tenha medida m . Use um vértice do pentágono como centro de homotetia.



3. Construa um quadrado no qual a diferença entre as medidas da diagonal e do lado seja igual a m .



4. Construa um heptágono regular com a medida do apótema a .

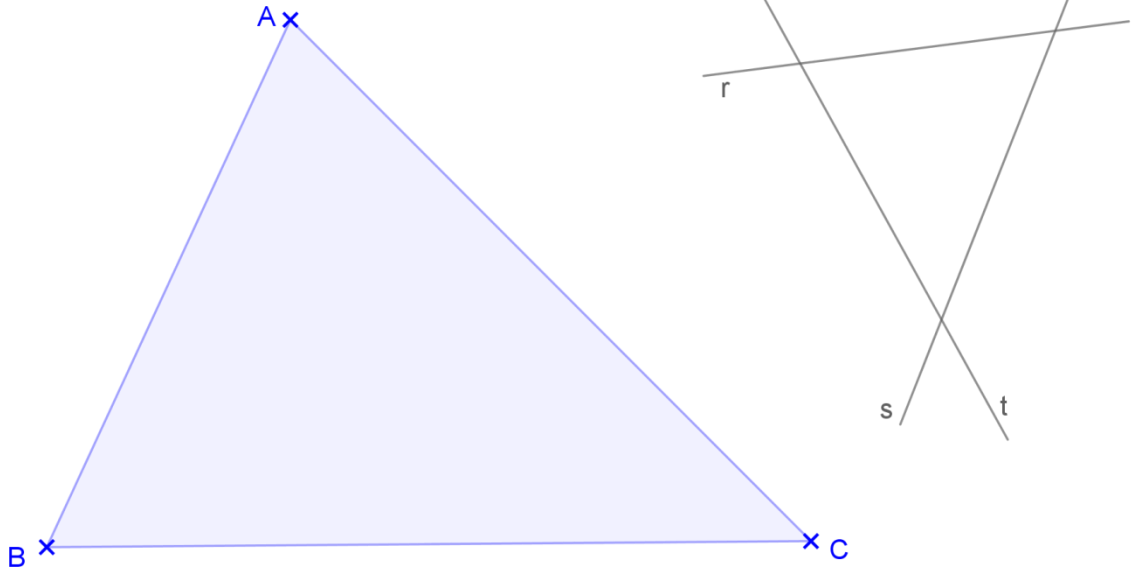


5. Construa um hexágono regular com a medida da diagonal menor igual a d .

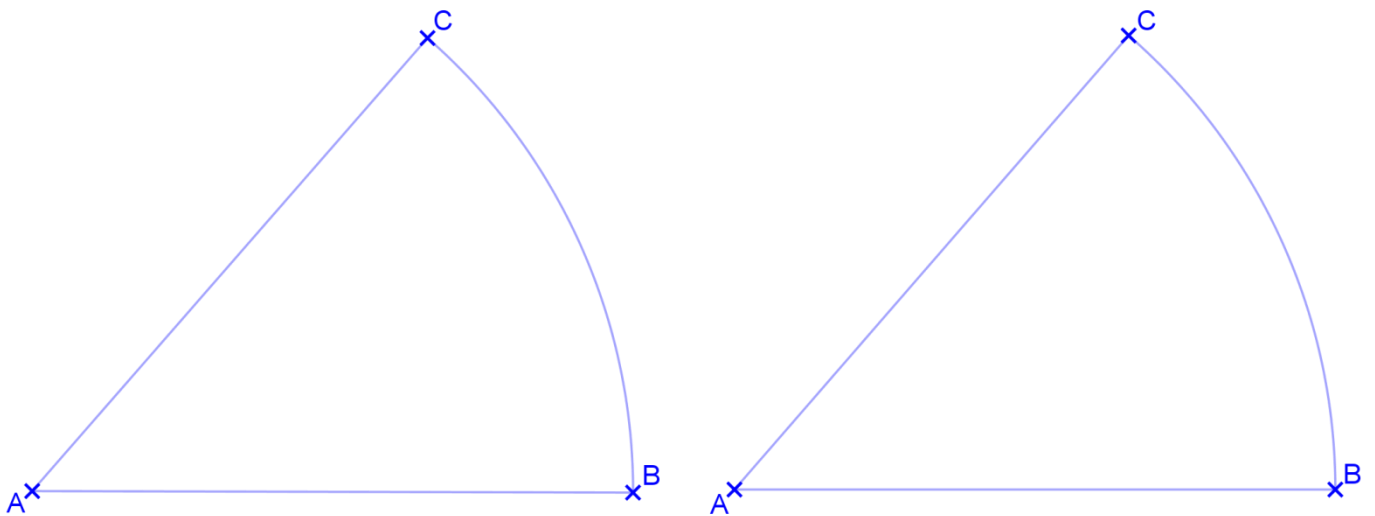


Há uma classe de problemas que propõem a construção de uma figura cuja posição está vinculada a linhas ou pontos dados. Nesses casos, abandonando uma das condições impostas à figura procurada, podemos construir uma figura homotética à mesma e em seguida “levá-la” à posição desejada por meio da homotetia.

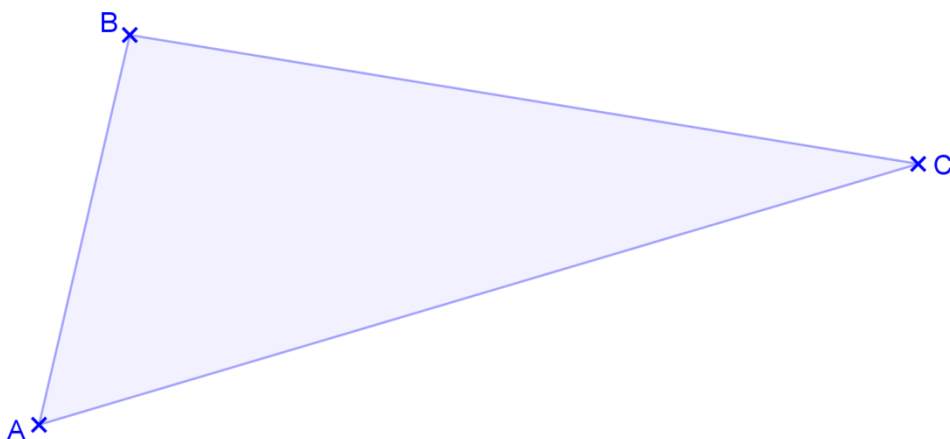
6. São dados um triângulo ABC e as retas r, s e t. Inscreva um triângulo XYZ no triângulo ABC de modo que cada um dos seus lados seja paralelo a uma das retas dadas.



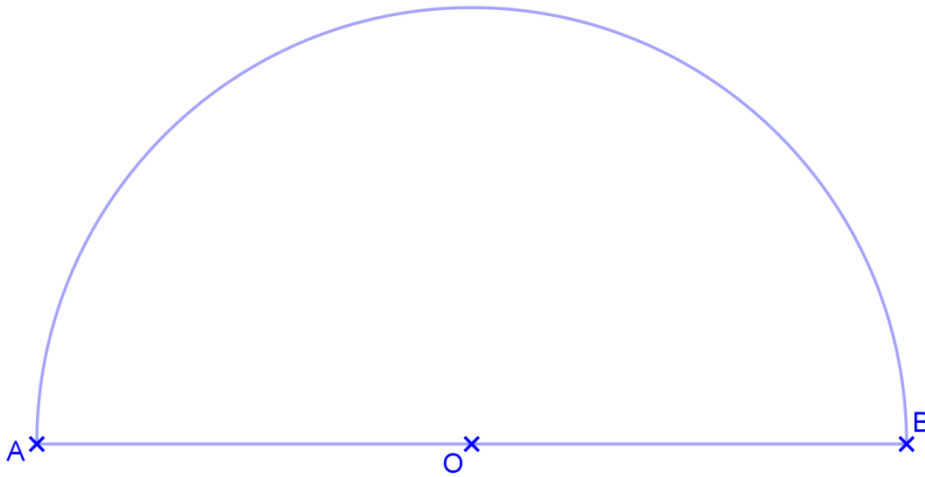
7. Inscreva um quadrado em um setor circular dado de duas maneiras diferentes.



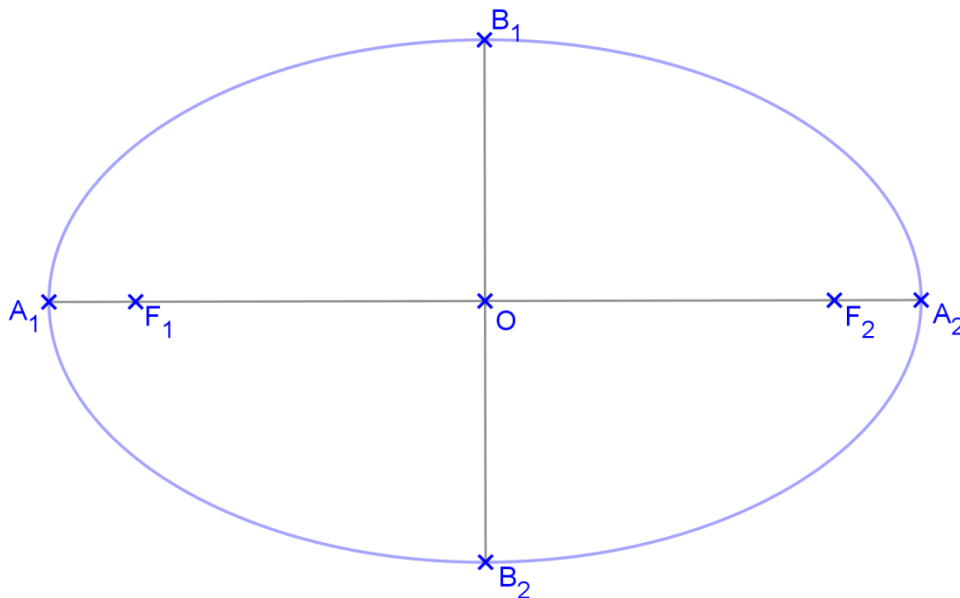
8. Inscreva um losango no triângulo ABC, tal que o ângulo C seja comum com o triângulo.



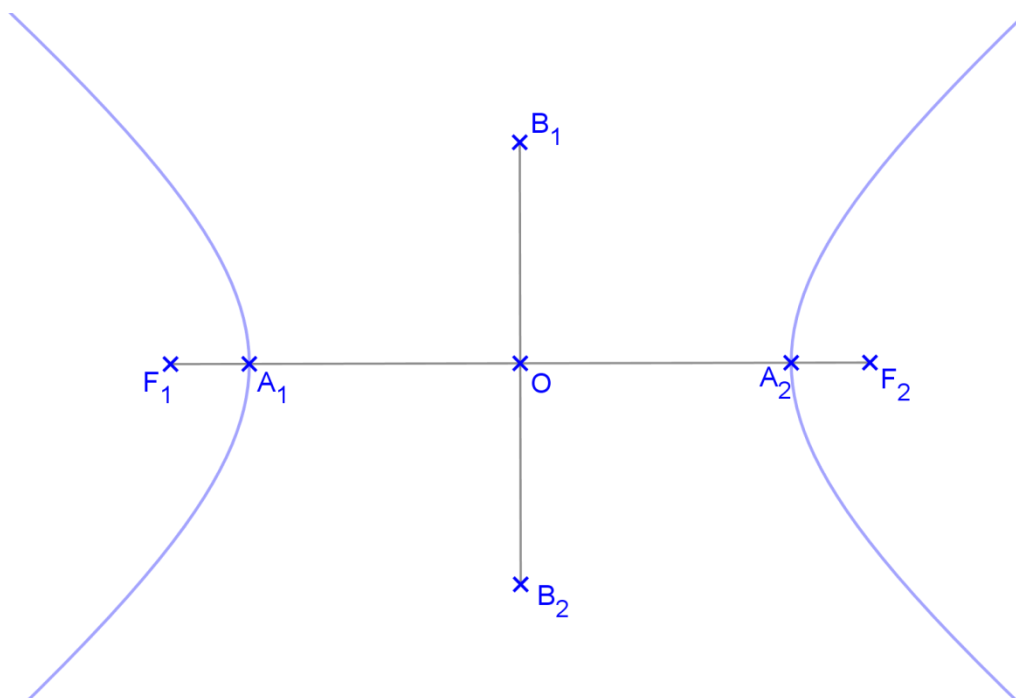
9. Inscreva um retângulo em um semicírculo, tal que um dos lados tenha o triplo do tamanho do outro.



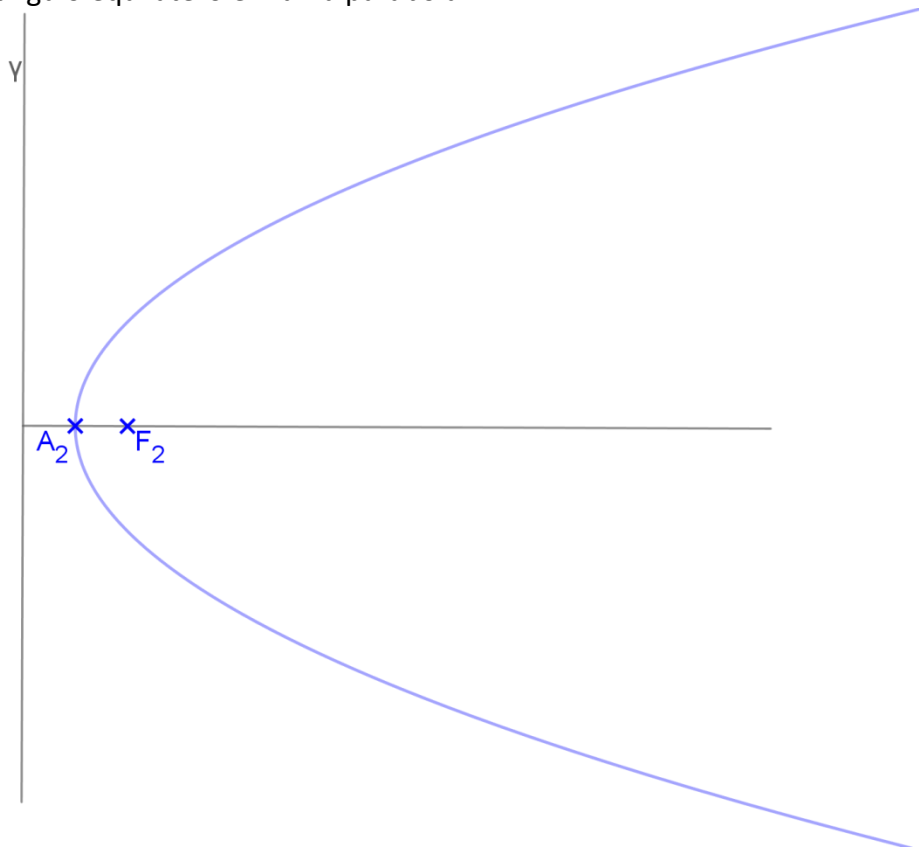
10. Inscreva um quadrado em uma elipse.



11. Inscreva um retângulo de lados proporcionais aos números 2 e 3 em uma hipérbole.

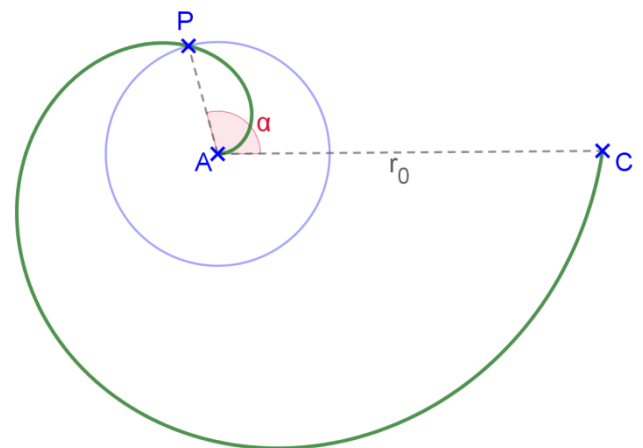


12. Inscreva um triângulo equilátero em uma parábola.



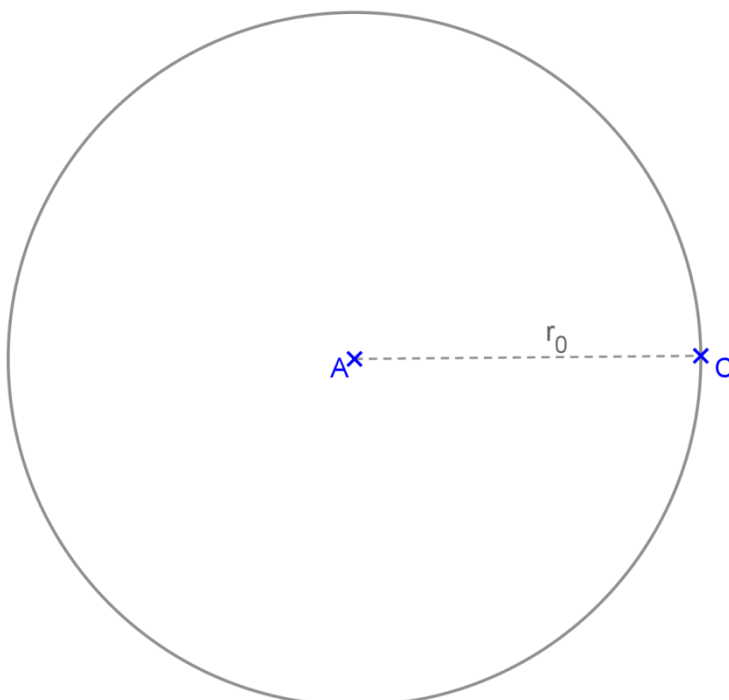
3.2. Curvas

Definição: A **espiral de Arquimedes** resulta do movimento do ponto P que se desloca em velocidade uniforme sobre um raio AC = r que gira em torno do ponto fixo A. A equação polar desta espiral é: $r = \frac{r_0 \cdot \alpha}{2\pi}$.



Exercício:

Construa uma espiral de Arquimedes por pontos.

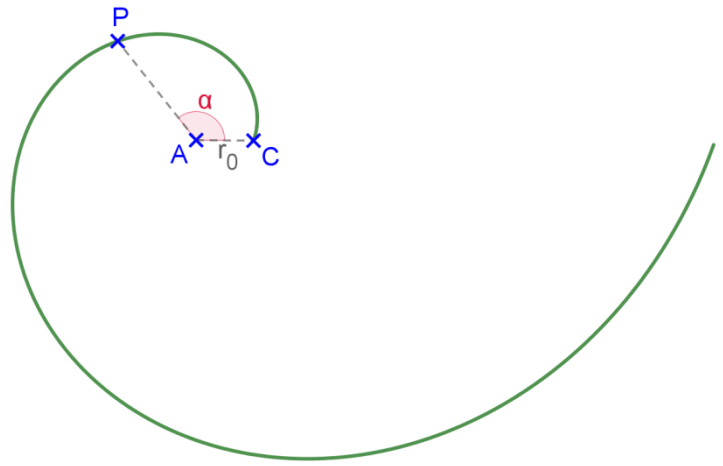


Definição: Se um ponto C colocado sobre um raio vetor de uma espiral se desloca em progressão geométrica, enquanto este raio se desloca em progressão aritmética em torno do ponto A, o lugar geométrico de C será uma **espiral logarítmica**.

A equação polar desta espiral é: $r = r_0 \cdot e^{m \cdot \alpha}$, $m = \cotg(\beta)$ e β é o ângulo polar tangencial.

Exercício:

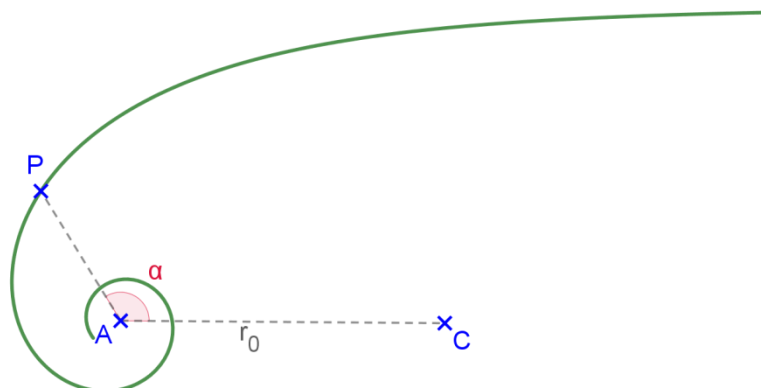
Construa uma espiral logarítmica por pontos.



$$A \times \bar{r}_0 \times C$$

Definição: A espiral **hiperbólica** é o lugar geométrico dos pontos extremos de vetores com intensidade inversamente proporcional aos seus ângulos com o eixo principal.

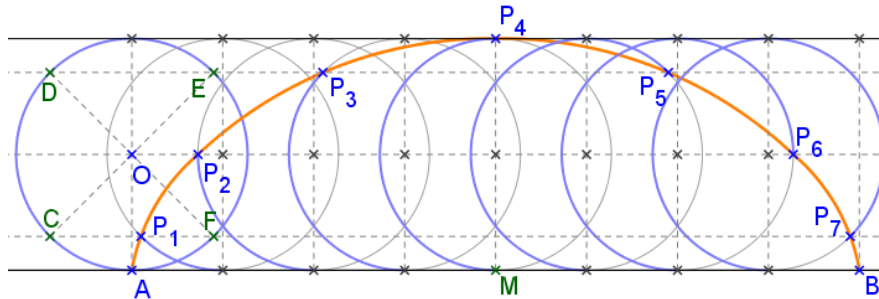
A equação polar desta espiral é: $r = \frac{r_0}{\alpha}$.



Exercício:

Construa uma espiral hiperbólica usando a equação polar.

Definição: Chama-se **ciclóide** uma curva plana descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola sem escorregar sobre uma reta.

**Elementos:**

- a circunferência é denominada **circunferência geradora**;
- a reta é denominada **diretriz**;
- o ponto que descreve a ciclóide é chamado de **ponto gerador**.

Existem três tipos de ciclóide: a **simples ou normal**, quando o ponto P gerador da ciclóide pertence à circunferência geradora; a **encurtada**, quando o ponto gerador está no interior da circunferência geradora; e a **alongada**, quando o ponto gerador é externo à circunferência geradora.

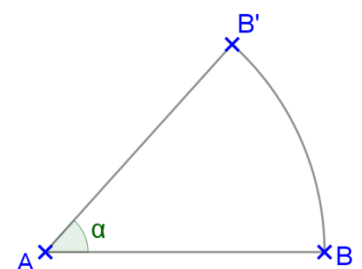
Exercício:

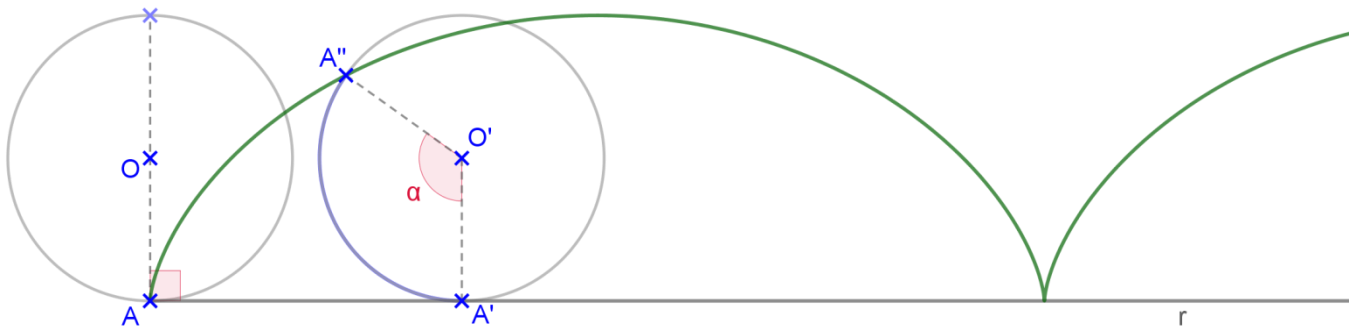
Construa uma ciclóide simples, com circunferência geradora de raio 2cm.

3.2.1. Rotação

Definição: Para encontrar a rotação do ponto B em torno de um ponto fixo A com amplitude α , basta encontrar B' tal que $AB' = AB$ e $\hat{B}AB' = \alpha$.

Esta transformação geométrica pode ser utilizada na construção de ciclóides, epicyclóides e hipociclóides.





Exercícios propostos:

1. Construa uma cicloide simples, com circunferência geradora de raio qualquer da seguinte forma: encontre um ponto da curva usando rotação e defina o lugar geométrico em relação a um ponto móvel da reta.
2. Construa uma cicloide encurtada com a mesma ideia do exercício anterior.
3. Construa uma cicloide alongada com a mesma ideia dos exercícios anteriores.
4. Construa uma cicloide simples com uma circunferência geradora de raio qualquer com centro O. Na circunferência móvel, com centro O', construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel A'' da cicloide.

Definição: Chama-se **epicicloide** a curva descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola externamente, sem escorregar, sobre outra circunferência fixa.

Elementos da epicicloide:

- a) a circunferência móvel é a **circunferência geradora**;
- b) o ponto que descreve a epicicloide é o **ponto gerador**;
- c) a circunferência fixa é a **circunferência diretora**.

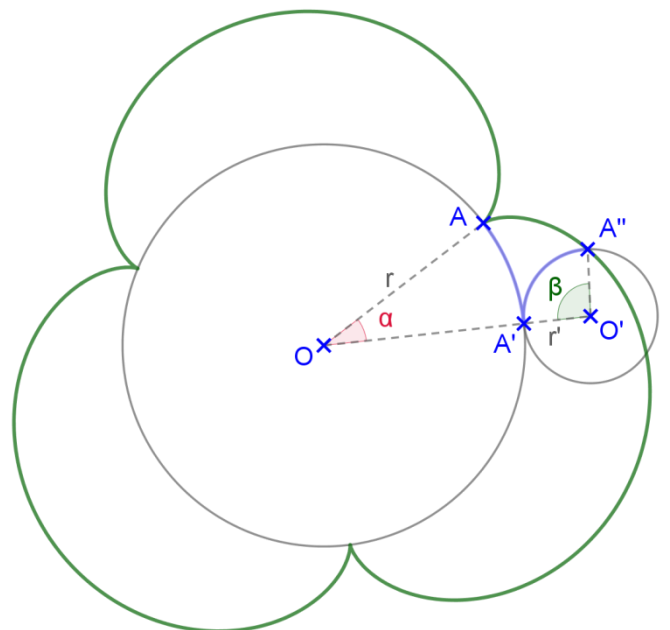
Conforme o ponto gerador pertença à circunferência geradora, ou esteja no seu interior ou no seu exterior, a epicicloide é chamada, respectivamente, **simples**, **encurtada** ou **alongada**.

Quando a circunferência geradora completa uma volta inteira, o ponto gerador descreve um **ciclo** da epicicloide.

Epicicloides notáveis:

Sejam r e r' , respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma epicicloide. Se $r' = \frac{r}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) quando a circunferência geradora percorre a volta inteira da circunferência diretora, a epicicloide tem início e término num mesmo ponto. Nesse caso, o número de ciclos da epicicloide é igual a n , isto é, a circunferência geradora dá n voltas sobre si mesma para então completar uma volta inteira sobre a diretora.

Essas epicicloides particulares, em que $r' = \frac{r}{n}$, são denominadas **notáveis** e, para os casos em que $n \geq 3$, a figura constituída pela reunião dos n ciclos é chamada de **polígono epicicloidal**.

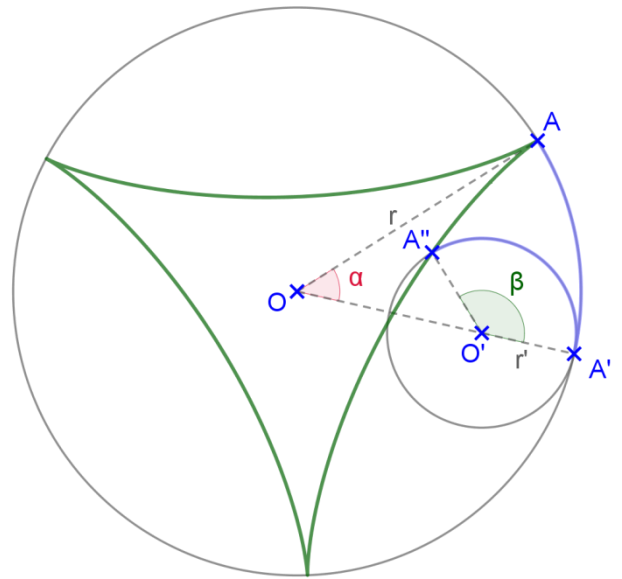


Exercícios propostos:

1. Construa uma epiciclóide com $r' = \frac{r}{n}$, onde $n \geq 2$.
2. Construa uma epiciclóide alongada, com $r' = \frac{r}{n}$, $n \geq 2$ e P pertencente ao prolongamento de $O'A'$.
3. Construa uma epiciclóide encurtada, com $r' = \frac{r}{n}$, $n \geq 2$ e $P \in O'A'$.
4. Construa uma epiciclóide simples com $r' = \frac{r}{n}$, $n \geq 2$. Na circunferência móvel, com centro O' , construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel A'' da epiciclóide.

Definição: Chama-se **hipociclóide** a curva descrita por um ponto de um raio ou do prolongamento de um raio de uma circunferência que rola internamente sem escorregar sobre outra circunferência fixa. As hipociclóides podem ser: **simples**, **encurtadas** ou **alongadas**.

Sejam r e r' , respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma hipociclóide. Se $r' = \frac{r}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) quando a circunferência geradora percorre a volta inteira da circunferência diretora, a hipociclóide tem início e término num mesmo ponto.

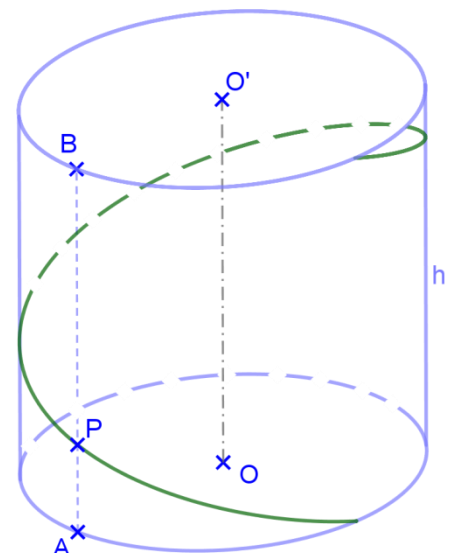
**Exercícios propostos:**

1. Construa uma hipociclóide com $r' = \frac{r}{n}$, onde $n \geq 2$.
2. Construa uma hipociclóide alongada, com $r' = \frac{r}{n}$, $n \geq 2$ e P pertencente ao prolongamento de $O'A'$.
3. Construa uma hipociclóide encurtada, com $r' = \frac{r}{n}$, $n \geq 2$ e $P \in O'A'$.
4. Construa uma hipociclóide simples com $r' = \frac{r}{n}$, $n \geq 2$. Na circunferência móvel, com centro O' , construa um pentágono regular estrelado inscrito. Faça com que um dos vértices do pentágono seja o ponto móvel A'' da hipociclóide.

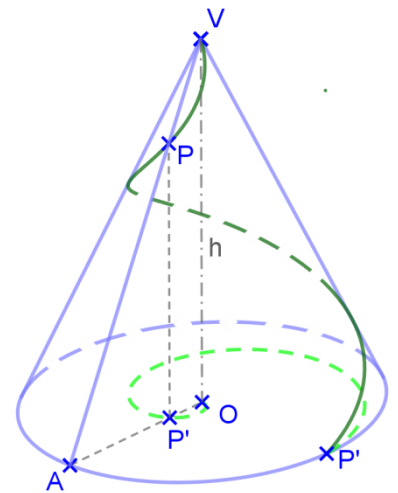
Definição: Uma **hélice cilíndrica** é uma curva que intersecta as geratrizes de um cilindro circular reto segundo ângulo constante.

Exercício proposto:

Construa as projeções de uma hélice cilíndrica, dadas as medidas do raio da base r e da altura h do cilindro.



Definição: Uma **hélice cônica** é uma curva que intersecta as geratrizes de um cone circular reto com ângulo constante.



Exercício proposto:

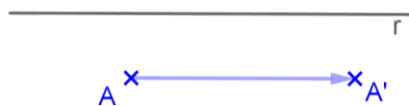
Construa as projeções de uma hélice cônica, dadas as medidas do raio da base r e da altura h do cone.

3.2.2. Translação

Definição: Seja um ponto se deslocando sobre uma reta r , de uma posição A para uma posição A' . Dizemos que A sofreu uma translação de A para A' . Esta translação pode ocorrer nos dois sentidos.

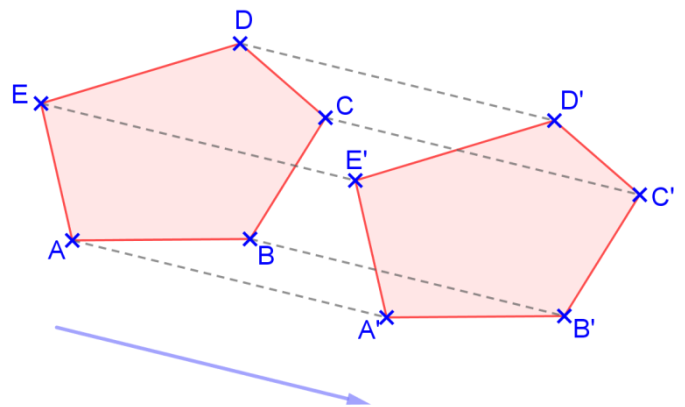


Considere um ponto A , não pertencente à reta r , se deslocando para a posição A' , paralelamente à r . Dizemos que a translação do ponto A tem a direção da reta r .



A translação de um ponto A para uma posição A' fica definida quando se conhecem três características distintas desse deslocamento: a direção, o sentido e a amplitude (distância entre A e A').

Definição: Considere uma figura qualquer F . Suponha que cada ponto de F sofra uma translação de mesma direção, sentido e amplitude. O conjunto de todos os pontos obtidos pelas translações dos pontos de F é uma segunda figura F' . Dizemos, então, que F' é uma transformação de F por translação.



Se, por meio de uma translação, um ponto A de uma figura F se transforma no ponto A' da figura F' , então dizemos que A e A' são pontos homólogos, ou ainda que A' é a imagem de A pela translação.

Considere uma translação que transforma uma figura F na figura F' . Se A e B são pontos quaisquer de F e A' e B' os seus homólogos em F' , então $AB \parallel A'B'$ e $AB = A'B'$.

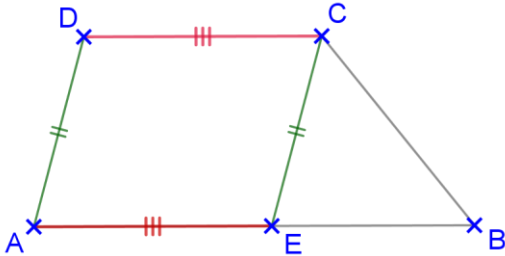
O método da translação é usado para aproximar os elementos dados uns dos outros, transportando qualquer um dos segmentos da figura para novas posições, paralelas às posições primitivas.

Esse método pode ser aplicado quando conhecemos dois segmentos de uma figura e o ângulo que eles formam entre si. Deslocando-se um deles de maneira que uma das extremidades coincida com uma extremidade do outro, obtemos um triângulo que pode ser construído, e em seguida, podemos obter a solução.

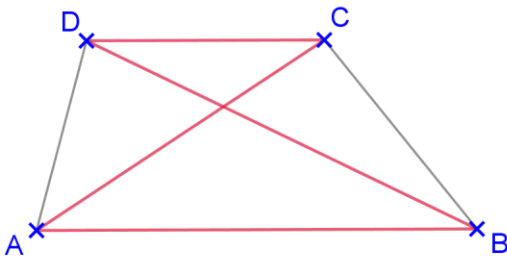
Exercícios:

1. Construa um trapézio ABCD de bases AB e CD, dadas as medidas dos quatro lados.

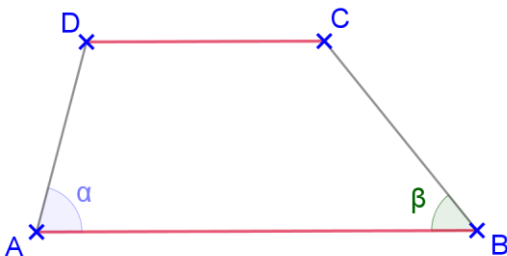
Solução: Começando-se pela construção de uma base sobre a outra (CD sobre AB), encontramos o segmento $AE = CD$. Logo, aplicando-se uma translação sobre AE até chegar em CD, obtemos a posição da base menor. Para determinar a posição correta desta base, basta encontrar o ponto C ($EB = AB - CD$, $EC = AD$ e BC é conhecido). Dados: $AB = 7\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $CD = 4,5\text{cm}$, $AD = 3,5\text{cm}$.



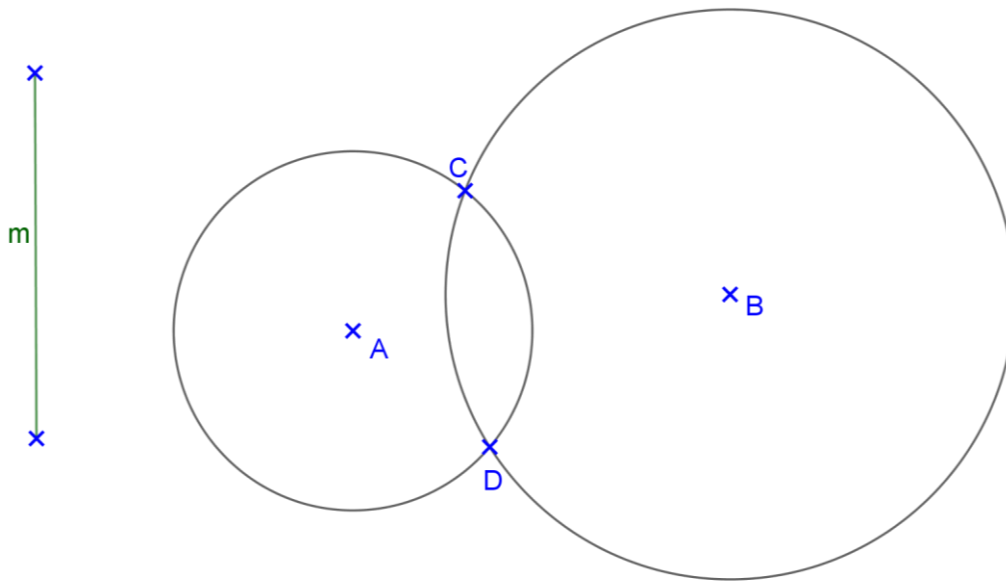
2. Construa um trapézio ABCD, dadas as medidas das bases AB e CD e das diagonais AC e BD. Dados: $AB = 8,5\text{cm}$, $CD = 3,5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $BD = 8\text{cm}$.



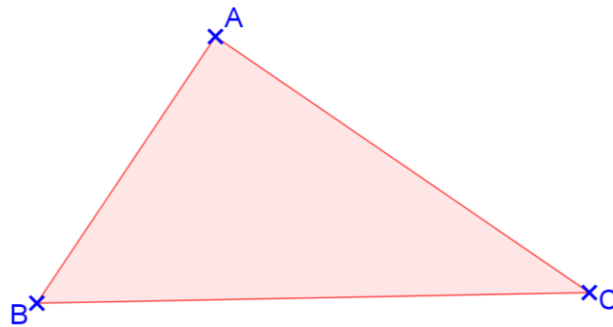
3. Construa um trapézio ABCD, de bases AB e CD, dadas as medidas das bases AB e CD e dos ângulos \hat{A} e \hat{B} . Dados $AB = 8,5\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$.



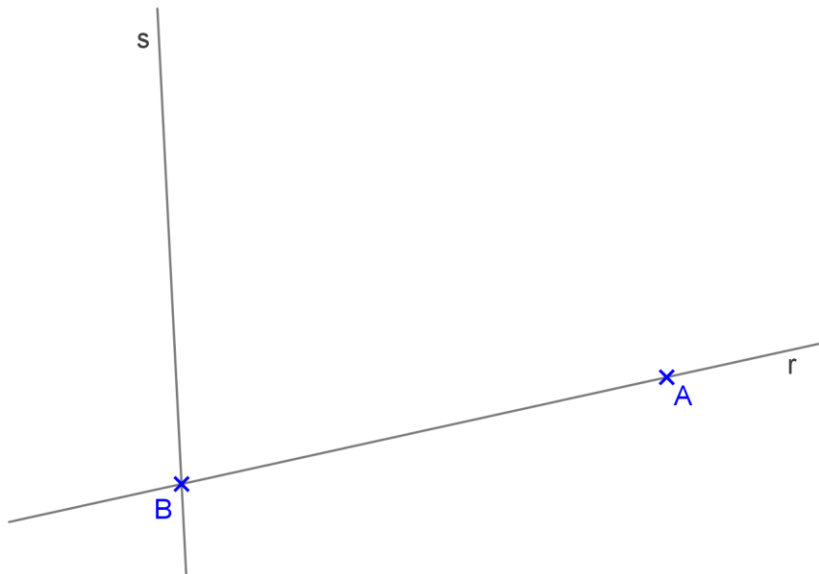
4. São dados um segmento de comprimento m e duas circunferências de centros A e B , secantes nos pontos C e D . Traçar por C uma reta que intersecte uma circunferência em P , a outra em Q , de modo que se tenha $PQ = 2m$.



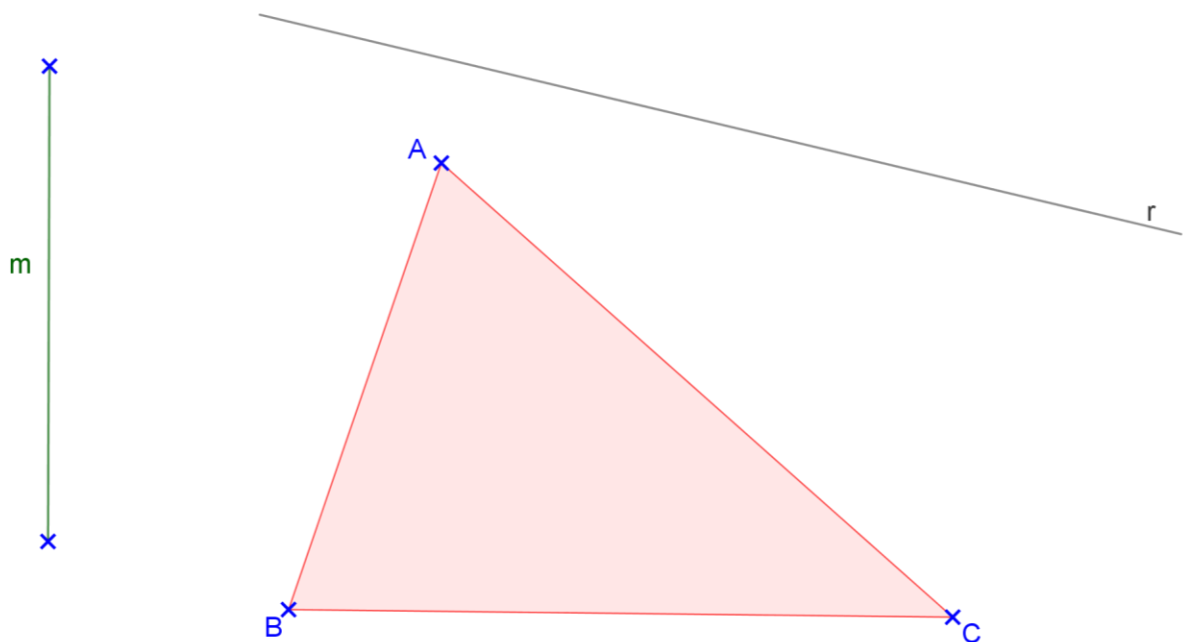
5. Circunscreva a um triângulo ABC dado um triângulo equilátero.



6. São dadas duas retas r e s , concorrentes em B , e um ponto A sobre r . Determine um ponto C em s que enxergue o segmento AB segundo um ângulo de 60° .

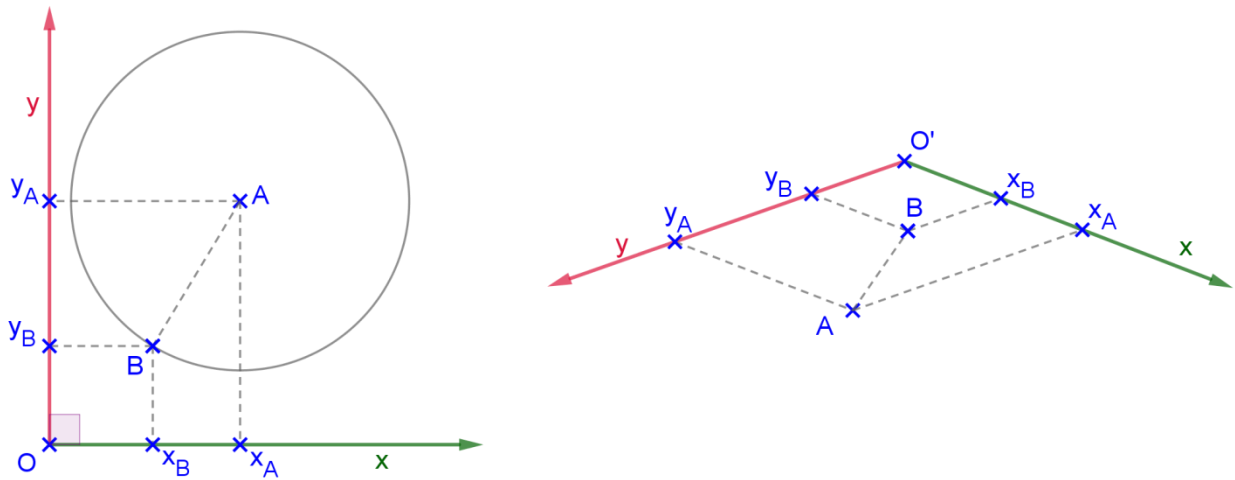


7. São dados um triângulo ABC , um segmento m e uma reta r . Construa uma reta paralela a r que intersecte o lado AB em X e o lado AC em Y , de modo que $XY = m$.



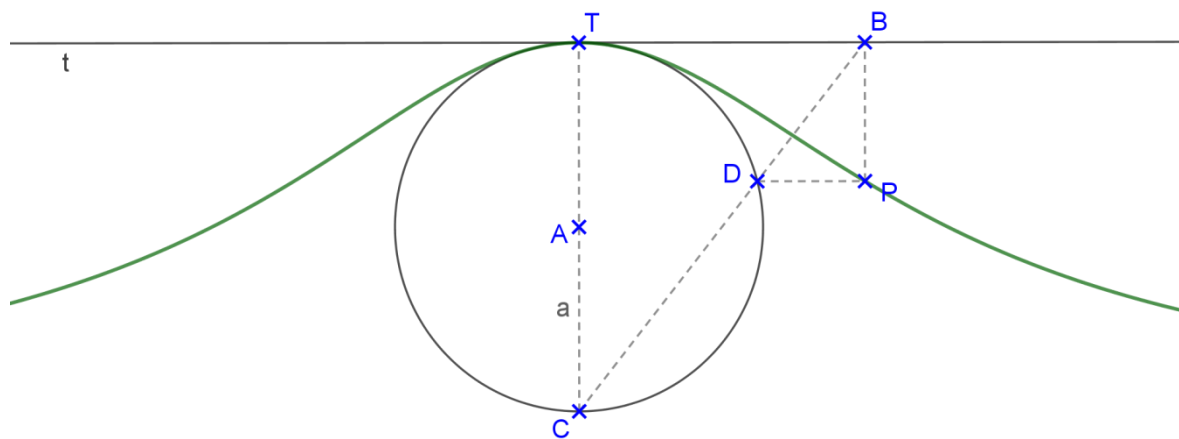
Exercícios propostos:

1. Construa um sistema de coordenadas xy , com eixos perpendiculares. Defina uma transformação que transfira as coordenadas deste sistema para um sistema em perspectiva, usando como base a transformação de uma circunferência de centro A e raio AB em uma circunferência em perspectiva com raio $A'B'$. A partir destes elementos, construa uma hélice cilíndrica em perspectiva, usando a translação para marcar a altura e os pontos da hélice.



2. Faça os mesmos procedimentos para construir a hélice cônica em perspectiva.
3. Construa uma hélice esférica em perspectiva.
4. Construa uma hélice elíptica em perspectiva.
5. Construa uma hélice hiperbólica em perspectiva.
6. Construa uma hélice parabólica em perspectiva.

Definição: Na geometria, a **curva de Agnesi** ou **Versiera** é uma curva cúbica do plano caracterizada por uma forma de sino, semelhante à distribuição de Gauss. É uma curva simétrica em relação ao eixo y , onde x é uma assíntota da curva. Sua equação é $y \cdot x^2 = a^2(a - y)$, onde a é a medida do diâmetro de uma circunferência.



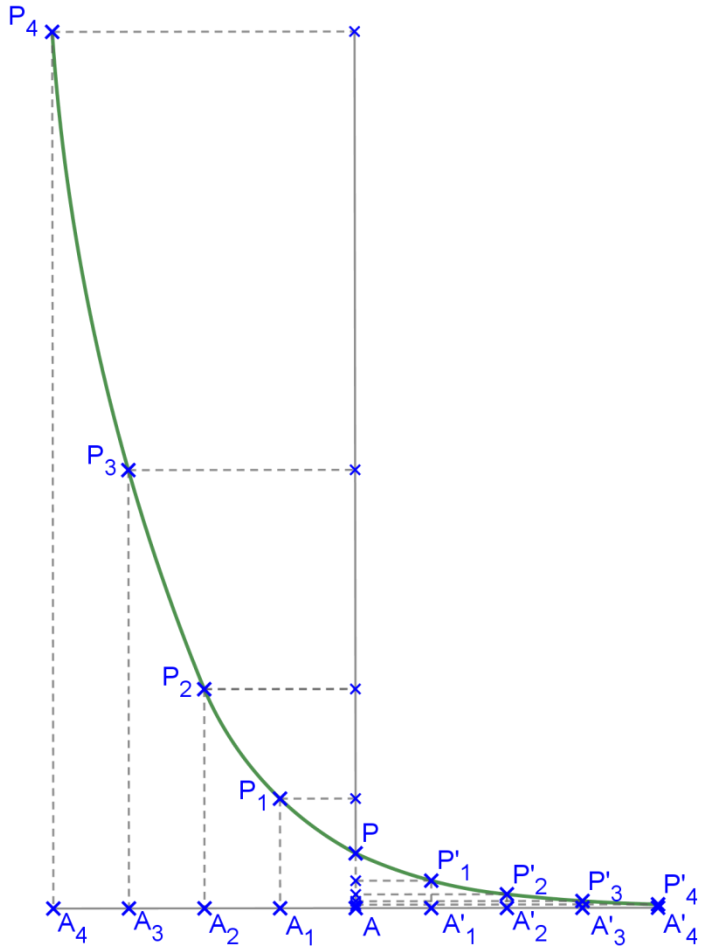
Exercício proposto:

Construa a curva de Agnesi de uma circunferência de raio a .

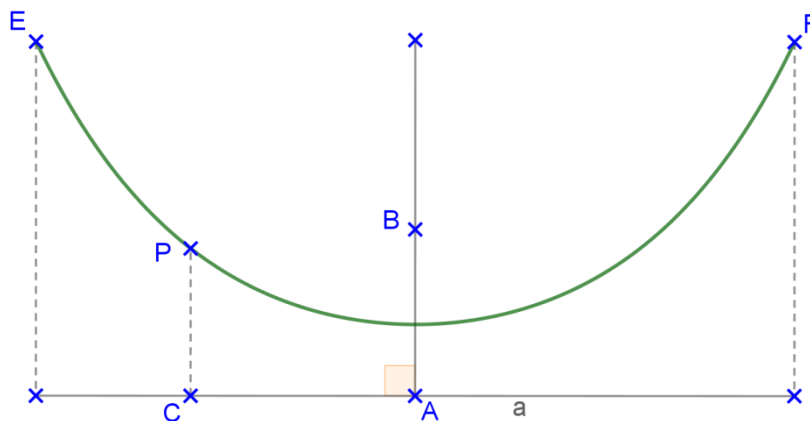
Definição: A **curva logarítmica** é caracterizada pelo crescimento em progressão geométrica da ordenada, com o respectivo crescimento em progressão aritmética da abscissa, ou vice-versa.

Exercício proposto:

Construa uma curva logarítmica.



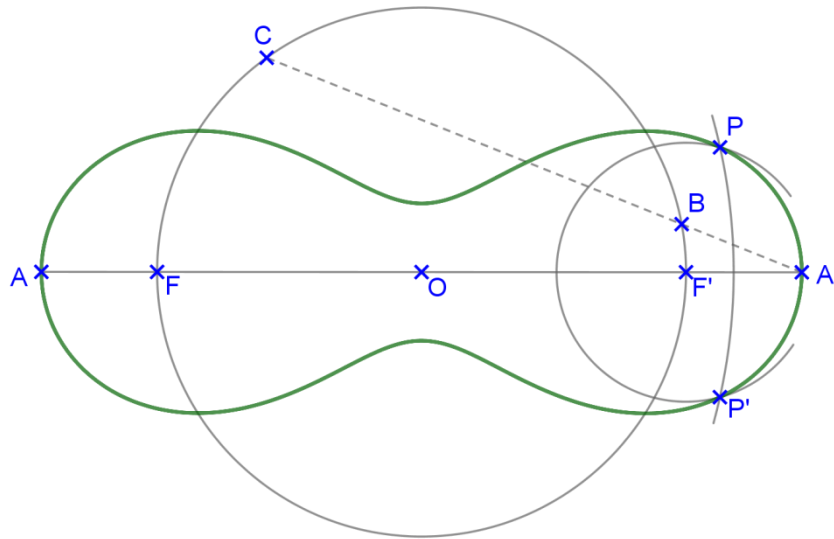
Definição: A **curva catenária** é formada por um fio flexível inextensível e homogêneo, sob ação da gravidade com seus extremos E e F fixos e com parâmetro AB.



Exercício proposto:

Construa uma curva Catenária, conhecendo as medidas do parâmetro AB e do segmento $a = EF$.

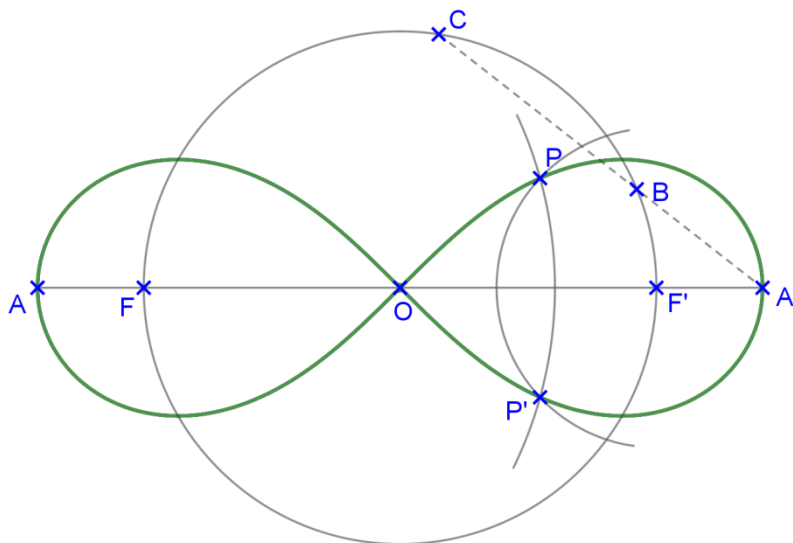
Definição: A **curva de Cassini** é fechada e o produto das distâncias de qualquer de seus pontos a dois pontos interiores, chamados de focos F e F' , é constante e igual a a^2 .



Exercício proposto:

Construa a curva de Cassini, dadas as medidas de AA' e de FF' .

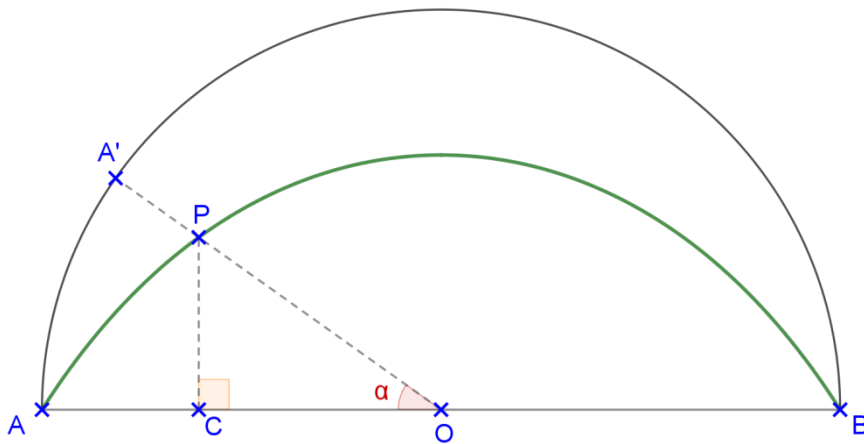
Definição: A **Lemniscata de Bernoulli** é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é constante, e igual ao quadrado da metade do segmento que liga dois pontos dados. Trata-se de um caso particular da curva de Cassini, quando $a = OF$.



Exercício proposto:

Construa a Lemniscata de Bernoulli, dada a medida FF' .

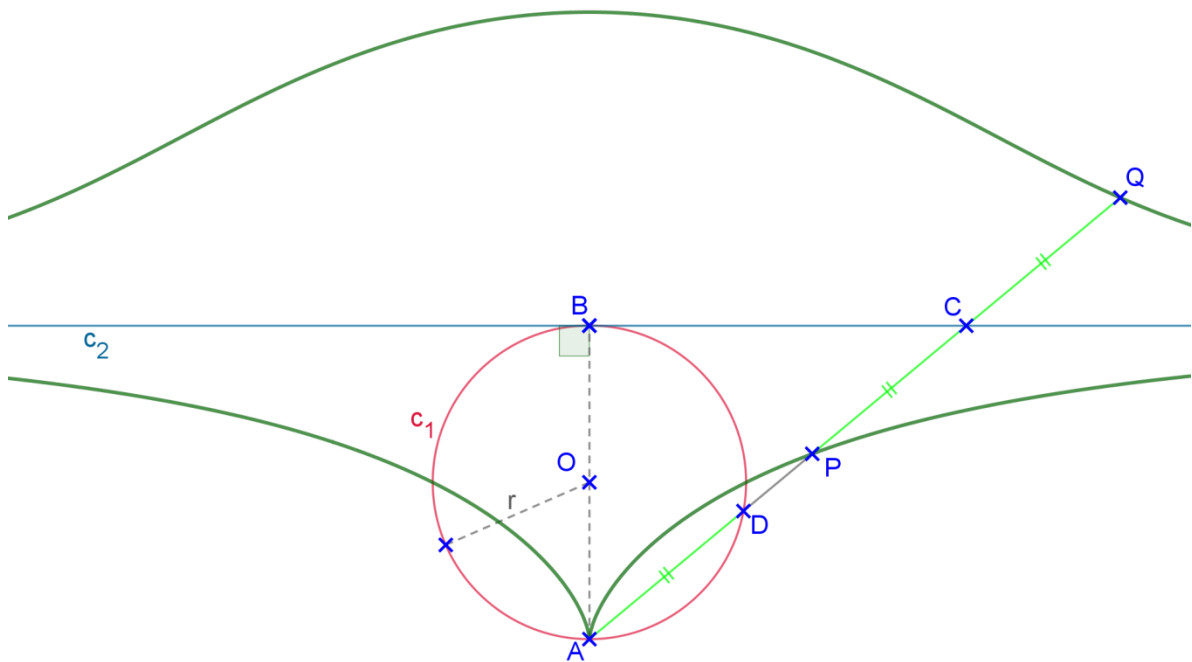
Definição: A **Quadratriz de Hippias** é a curva descrita pelo ponto de interseção de duas retas que se movem, onde a primeira é o raio de uma circunferência, e a segunda é uma paralela a um de seus diâmetros.



Exercício proposto:

Construa a Quadratriz de Hippias, definida pela medida do segmento dos pontos extremos AB.

Definição: Considere as curvas c_1 e c_2 e um ponto A chamado de pólo pertencente a c_1 (circunferência). Quando for possível determinar os pontos $E \in c_1$ (circunferência) e $D \in c_2$ (reta), ambos pertencentes à reta AC e tais que $PC = QC = AD$, o lugar geométrico dos pontos P e Q é chamado de **cissóide**.



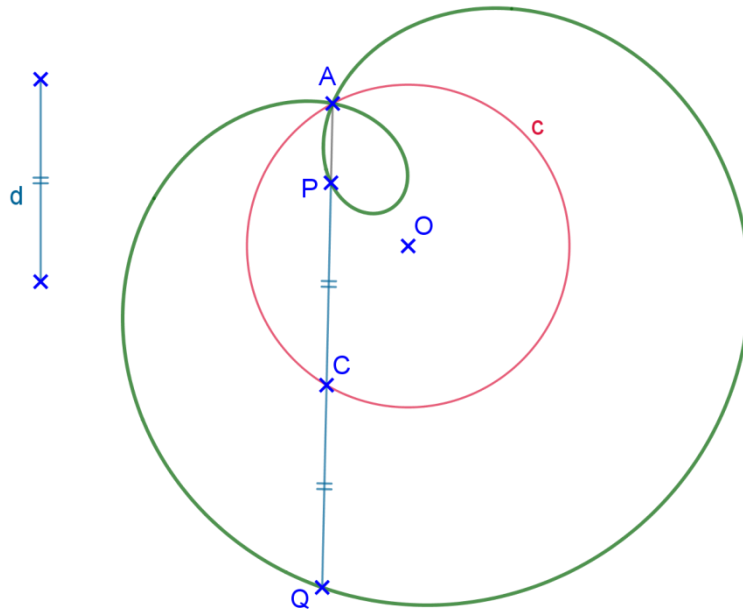
O exemplo acima é de uma cissóide simétrica em relação à reta AB, com a curva c_2 sendo uma reta tangente à circunferência. Deslocando-se a curva c_1 temos outros casos de cissóides.

Exercícios propostos:

1. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio com medida r , exterior a uma reta dada.
2. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio com medida r , tangente a uma reta dada.
3. Construa uma cissóide de uma circunferência de raio com medida r , secante a uma reta dada.

4. Construa uma cissóide de uma elipse, secante a uma reta dada.
5. Construa uma cissóide de uma hipérbole, secante a uma reta dada.

Definição: Considere uma curva c , uma distância d e um ponto A chamado de pólo. Quando for possível determinar os pontos C , P e Q pertencentes à reta AC , tais que $PC = QC = d$, o lugar geométrico dos pontos P e Q é chamado de **conchóide**.



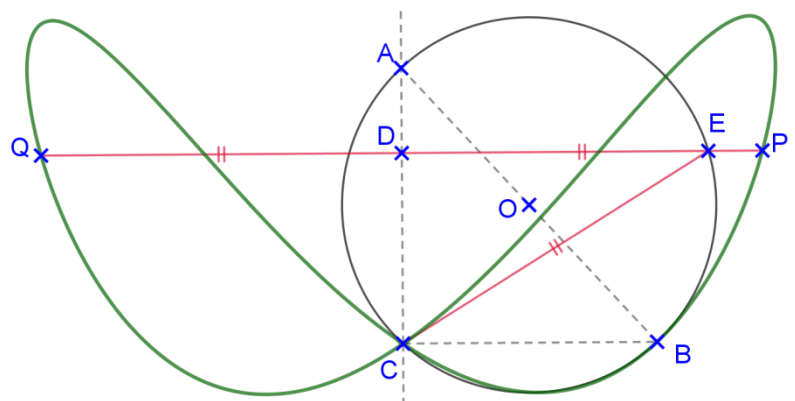
Exercícios propostos:

1. Construa a conchóide da circunferência de raio de medida r usando a medida do parâmetro d .
2. Construa a conchóide da circunferência de raio de medida r usando a medida do parâmetro $d = r$.
3. Construa a conchóide de uma reta s com a medida do parâmetro d e considerando o pólo $A \notin s$.
4. Construa a conchóide de uma elipse com a medida do parâmetro d .
5. Construa a conchóide de uma hipérbole com a medida do parâmetro d .

Definição: Dada a circunferência de diâmetro AB e um ponto C da circunferência, a **besácea** é o lugar geométrico dos pontos P que pertencem à paralela a BC , tais que D pertence à reta AC e $PD = EC$.

Exercício proposto:

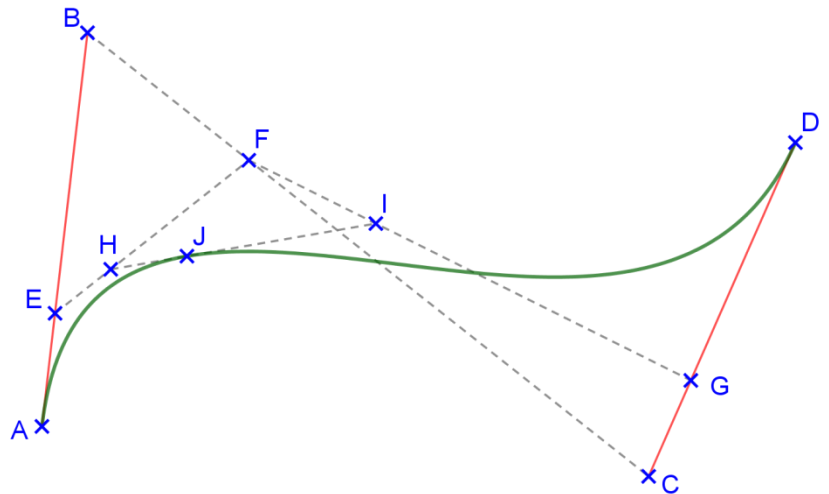
Construa uma besácea dadas as medidas do diâmetro AB e do segmento AC .



Definição: A **curva de Bézier** é uma polinomial e pode ser expressa como a interpolação linear entre alguns pontos representativos, chamados de pontos de controle. A curva de Bézier linear é baseada na proporção t entre os pontos de controle A e B (AE), usada na obtenção dos demais pontos usando a equação recursiva: $F = B + c \cdot (C - B)$, onde $c = \frac{AE}{AB}$.

Exercício proposto:

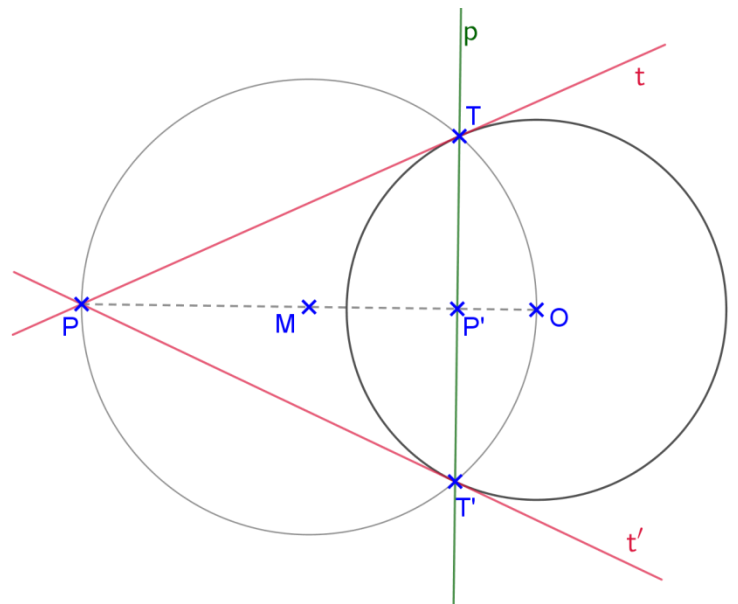
Construa uma curva de Bézier dados os segmentos AB e CD .



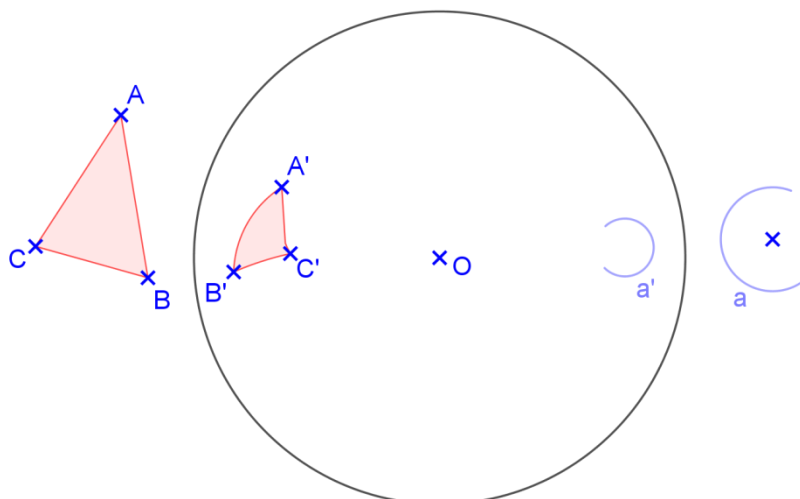
3.2.3. Inversão, pólo e polar

Definição: A **polar** é uma reta que está relacionada, ou com um par de retas, ou com uma circunferência ou com uma cônica. A um ponto P , denominado de pólo, corresponde uma reta p , denominada de **polar** do ponto P . Este conceito de pólo e polar está relacionado com o de razão harmônica de quatro pontos.

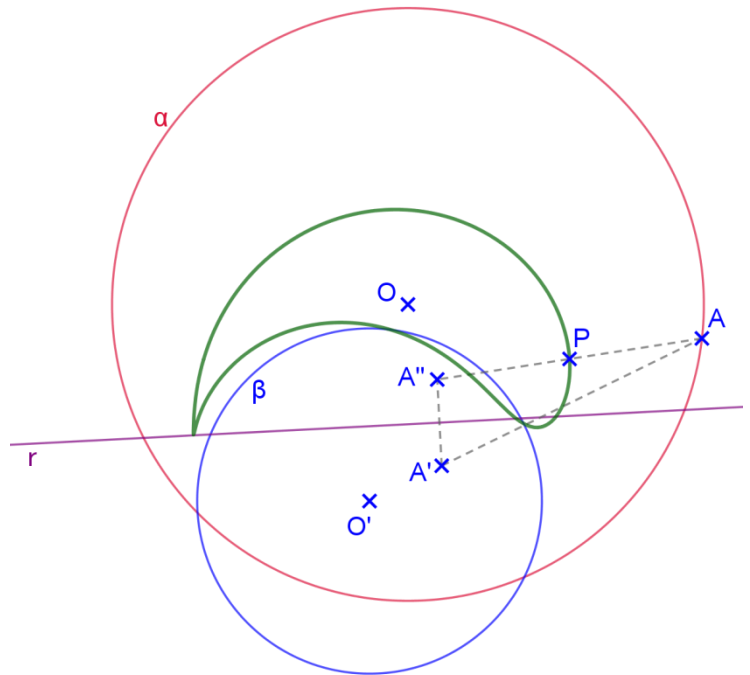
Considere uma circunferência de centro O e um ponto P exterior. Conduzimos por P tangentes t e t' à circunferência. A polar do ponto P em relação à circunferência corresponde às retas definidas pelos pontos de tangência T e T' . O ponto P' é denominado **inverso** de P em relação à circunferência.



Inversão de figuras:

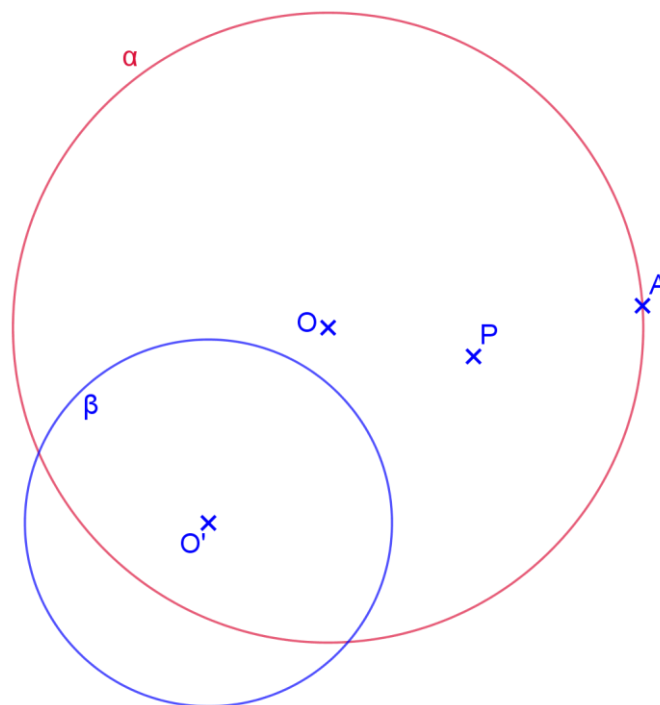


Definição: Uma seção bidimensional projetada para provocar a variação de velocidade chama-se **aerofólio**. Esta curva é também chamada de **curva de Joukowski**, e uma aproximação dela é construída com os seguintes elementos: as circunferências α e β ; uma reta r ; o inverso A' do ponto A de α em relação a β ; e o simétrico A'' do inverso A' de A em relação a β . O lugar geométrico dos pontos médios de AA'' é o aerofólio.



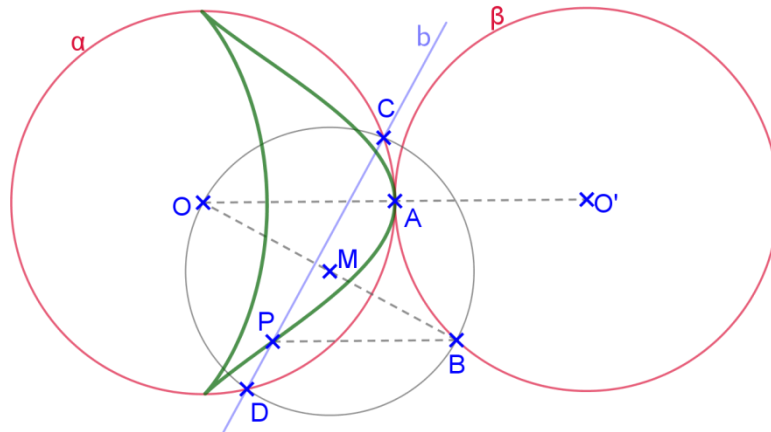
Exercícios propostos:

1. Construa a curva aerofólio dados os seguintes elementos: as circunferências α e β , e uma reta r .
2. Dados os pontos A e P e as circunferências α e β , encontre a reta r que define os pontos do aerofólio. Determine mais um ponto P' do aerofólio.

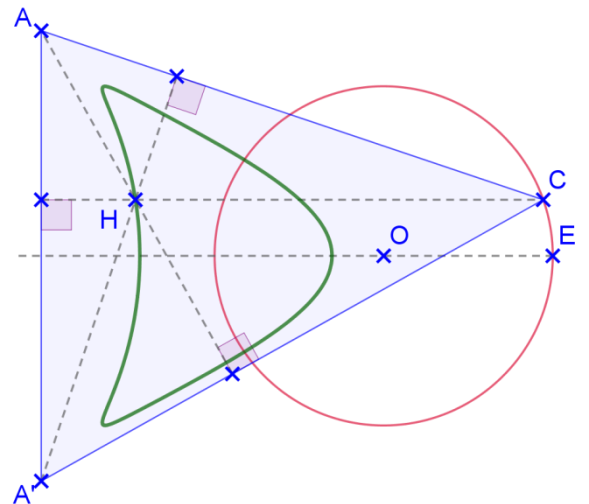


Uma curva chamada **bicorne**, similar a um chapéu de duas pontas, pode ser construída de três formas vistas a seguir.

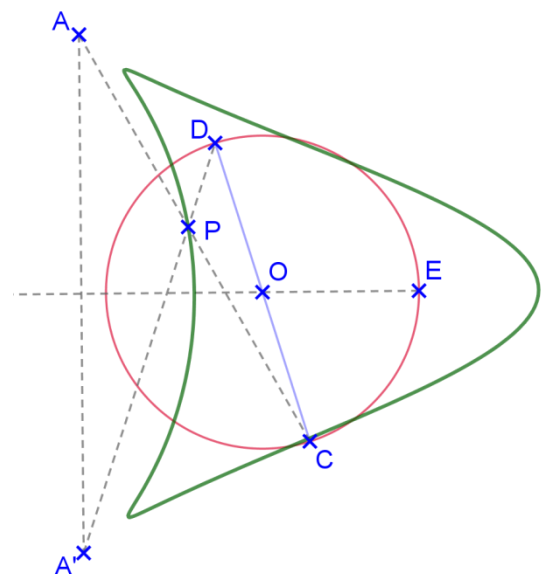
Definição 1: São dados as circunferências α e β , com raios iguais, tangentes em A e um ponto B pertencente a β . O lugar geométrico da interseção de BP, paralelo a OO' , com a reta CD, polar de B em relação a α , é uma curva **bicorne**.



Definição 2: São dados os pontos A e A', simétricos em relação a OE, a circunferência de centro O e raio OE e um ponto C pertencente a esta circunferência. O lugar geométrico do ortocentro de um triângulo AA'C é uma curva **bicorne**.



Definição 3: São dados os pontos A e A', simétricos em relação à reta OE, a circunferência de centro O e um diâmetro CD desta circunferência. O lugar geométrico da interseção das retas AC com A'D é uma curva **bicorne**.



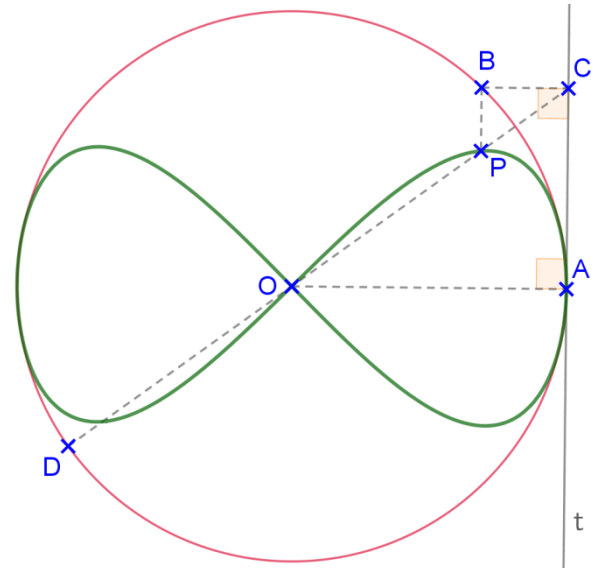
Exercício proposto:

Construa as curvas bicorne usando cada uma das definições.

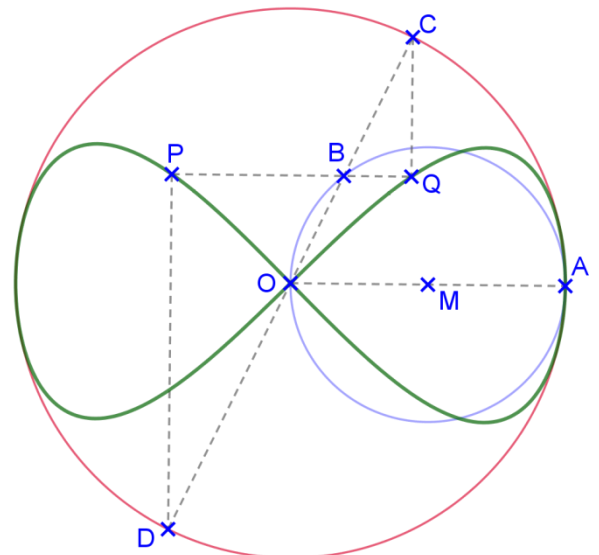
Nas curvas das definições 2 e 3 verifique as relações das medidas de AA' com o raio OE.

A curva **Lemniscata de Gerono**, similar ao símbolo de infinito, pode ser construída usando três lugares geométricos mostrados a seguir.

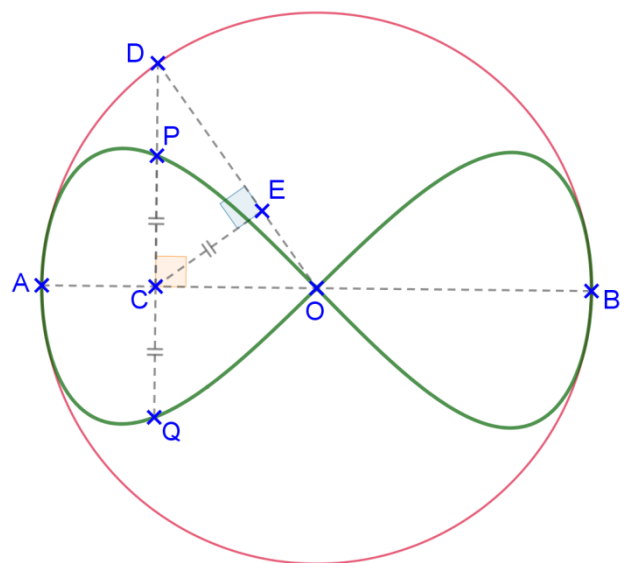
Definição 1: Dadas uma circunferência, uma reta tangente à circunferência t e um ponto B da circunferência, determine BC perpendicular a t e CD passando por O . A interseção da reta BP paralela à reta t com CD é o lugar geométrico definido como **Lemniscata de Gerono**.



Definição 2: Dadas as circunferências tangentes, uma de raio AO e outra de diâmetro AO , e um ponto B pertencente à circunferência menor, determine o diâmetro da circunferência maior que passa por B . As interseções de $PQ \parallel AO$ com $CQ \perp AO$ e $PD \perp AO$ é a **Lemniscata de Gerono**.



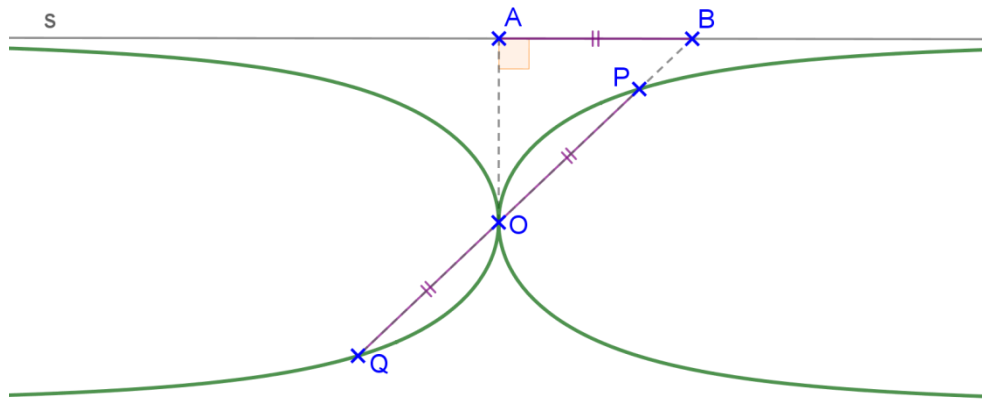
Definição 3: Considere a circunferência de diâmetro AB , o ponto C em AB e $CD \perp AB$. Além disso, considere $CE \perp OD$ e $CP = CQ = CE$. o lugar geométrico dos pontos P e Q é a **Lemniscata de Gerono**.



Exercício proposto:

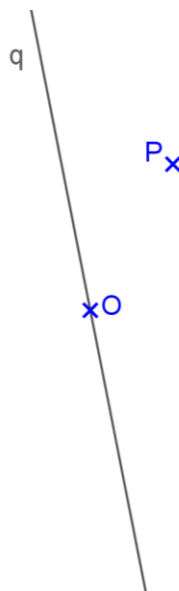
Construa as lemniscatas de Gerono usando cada uma das definições.

Definição: A **curva Gutschoven** ou **kappa** é uma curva algébrica bidimensional semelhante à letra κ do alfabeto grego. Dados um ponto O e uma reta s , considere $AO \perp s$ e $B \in s$. Unindo B com O e determinando $OP = OQ = AB$, onde $P, Q \in OB$, o lugar geométrico de P e Q é a curva **kappa**.

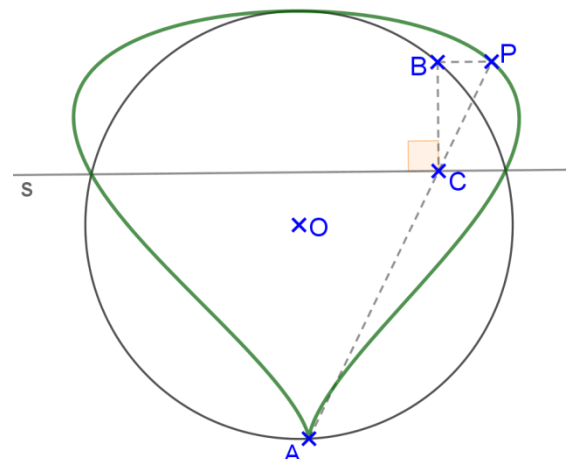


Exercícios propostos:

1. Construa uma curva kappa dados o ponto O e a reta s .
2. Dados os pontos O e P , onde P pertence à curva kappa, e a reta q que passa por A , determine a reta s da curva kappa. Determine um ponto a mais da curva kappa.



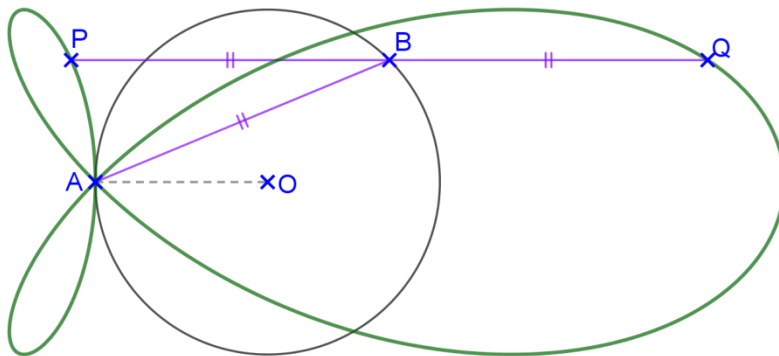
Definição: Dados uma circunferência de centro O e raio OA , uma reta s e um ponto B da circunferência. Considere $BC \perp s$, e o ponto A fixo. Unindo A e C , o ponto D será a interseção de $BD \parallel s$ com AC , e seu lugar geométrico será a curva **quártica piriforme** (forma de pêra ou lágrima).



Exercício proposto:

Construa uma quártica piriforme dados: a circunferência, o ponto A e a reta s .

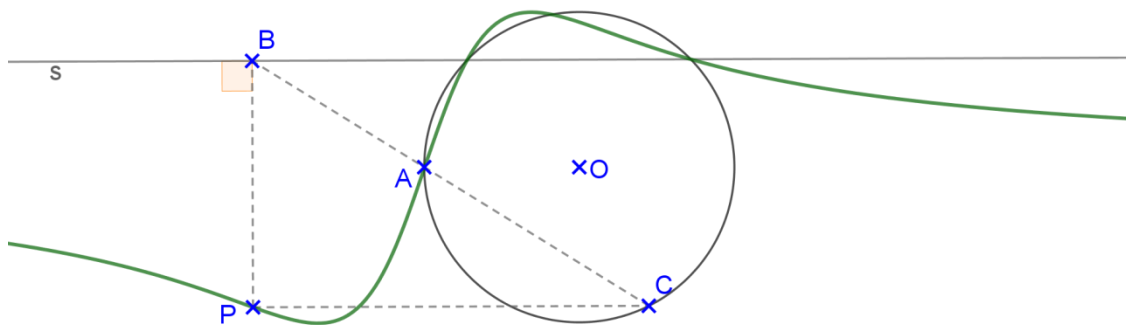
Definição: Dados uma circunferência de raio AO , com ponto A fixo, e um ponto B na circunferência, determine PQ passando por B tal que $AB = BP = BQ$ e $PQ \parallel AO$. O lugar geométrico dos pontos P e Q é a **curva torpeda**.



Exercício proposto:

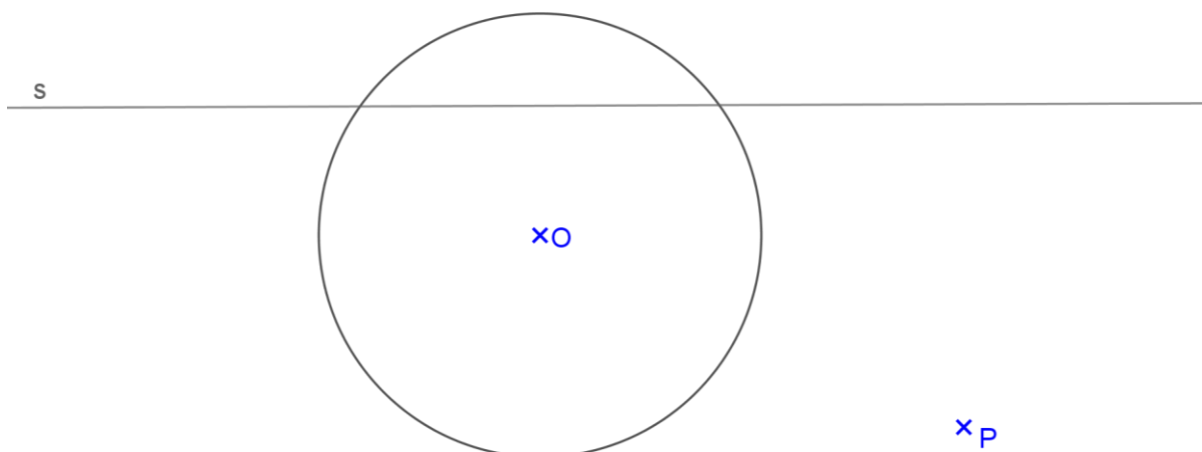
Construa uma curva torpeda dados: a circunferência e o ponto A fixo.

Definição: Dadas uma circunferência de raio AO , sendo A fixo, e uma reta s , considere um ponto $B \in s$ tal que $BP \perp s$. Unindo A e B encontramos C na circunferência. A interseção de BP com $CP \parallel s$ é um dos pontos da curva chamada **serpentina**.

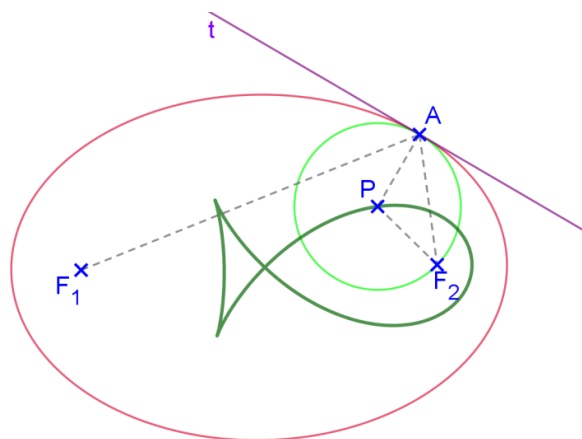


Exercícios propostos:

1. Construa uma serpentina dados: a circunferência, o ponto A e a reta s .
2. Dados a circunferência, a reta s e o ponto P da curva serpentina, determine o ponto fixo A . Encontre mais um ponto da curva.



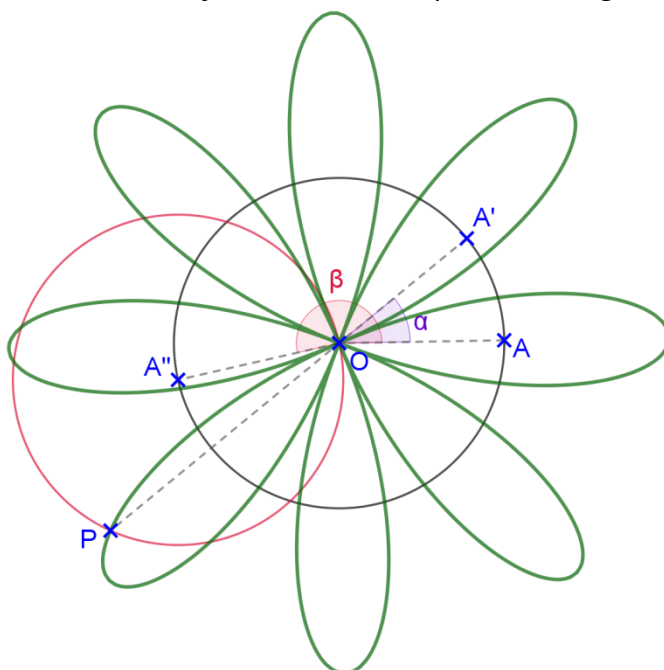
Definição: A **curva de Talbot** é o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma elipse que passam por um dos focos ou pelo centro da elipse. No exemplo ao lado, a curva é definida pelo foco F_2 .



Exercício proposto:

Construa uma curva de Talbot com as circunferências tangentes à elipse passando pelo centro da cônica.

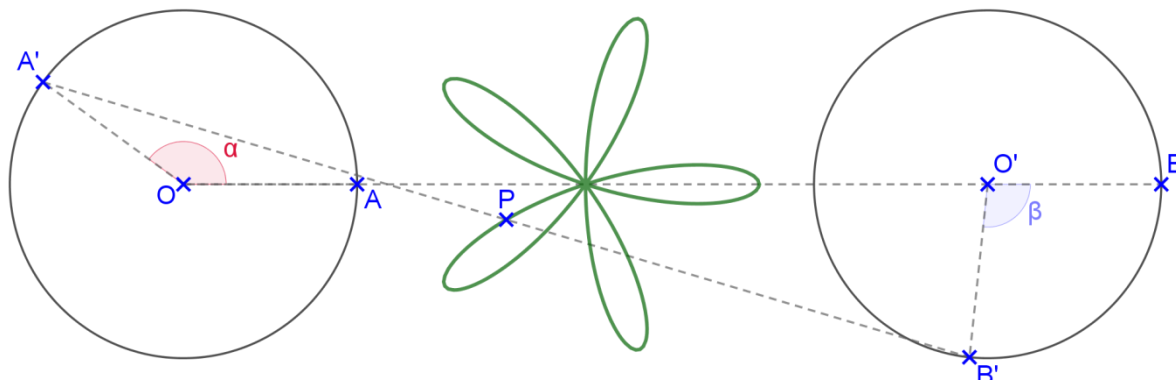
Definição: As **rosáceas** são obtidas por meio da trajetória da interseção de uma reta, que forma ângulo α com AO ($A'P$), e uma circunferência com raio $A''O$ que forma ângulo β com AO . A relação entre os ângulos é $\beta = n \cdot \alpha$.



Exercício proposto:

Construa rosáceas com $n = 2, 3, 4, 5$ e 6 .

Definição: Considere as circunferências de centros O e O' com raios iguais, um ângulo θ , e os raios OA e $O'B$ alinhados. Defina os ângulos centrais das circunferências α e β , tais que $\alpha = \widehat{AOA'} = n \cdot \theta$ e $\beta = \widehat{BOB'} = -m \cdot \theta$, onde m e n são números naturais. O lugar geométrico dos pontos médios de $A'B'$ é a **ciclóide centrada**.

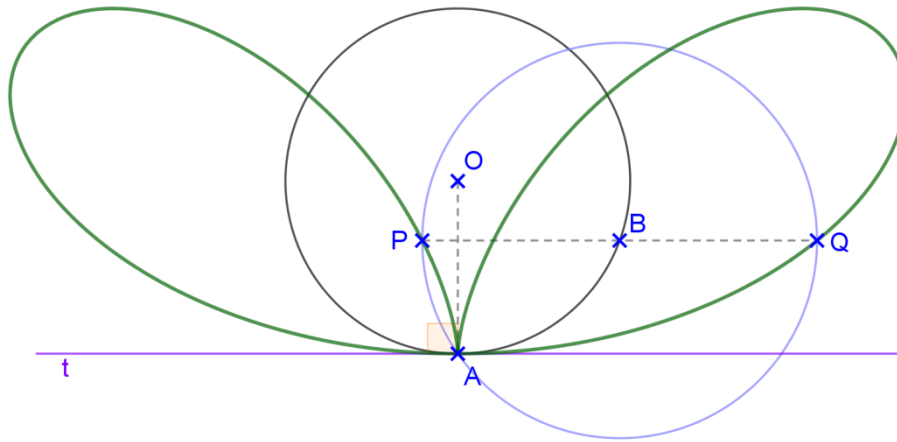


Exercício proposto:

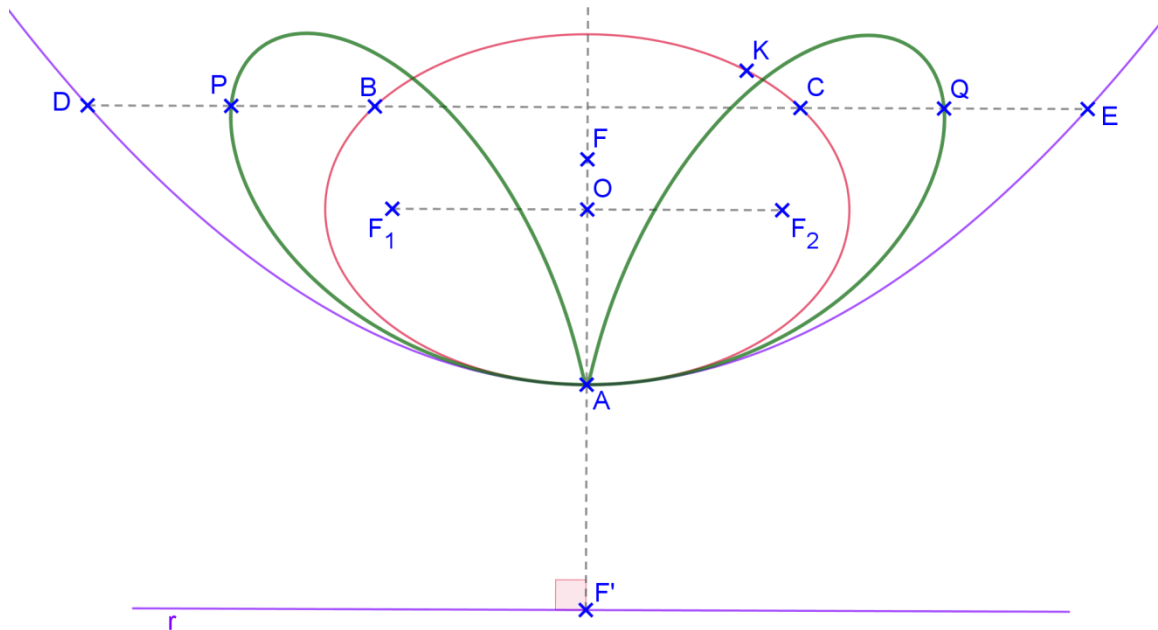
Construa as ciclóides centradas usando os pontos médios de $A'B'$, $B'P$ e PA' .

A curva **bifolium** pode ser construída usando três lugares geométricos mostrados a seguir.

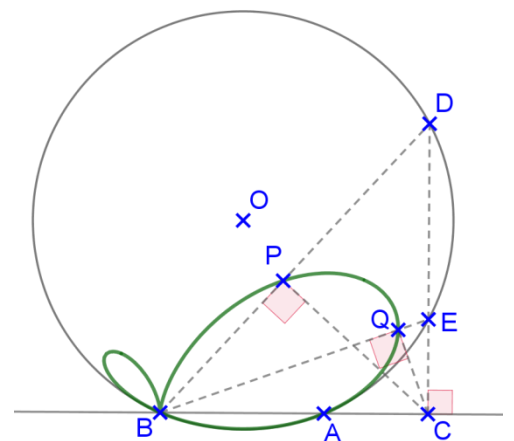
Definição 1: Dadas a circunferência de raio AO , onde A é fixo e a reta tangente t . Considere a circunferência de centro B e raio BA . As extremidades dos diâmetros paralelos à reta r determinam a curva **bifolium**.



Definição 2: Considere uma elipse e uma parábola, tangentes no vértice principal da parábola coincidente com o vértice do eixo menor da elipse. Seja uma reta $BC \parallel r$, onde r é a diretriz da parábola. O lugar geométrico dos pontos médios de BD e CE , onde D e E pertencem à parábola e B e C pertencem à elipse, determinam a curva **bifolium**.



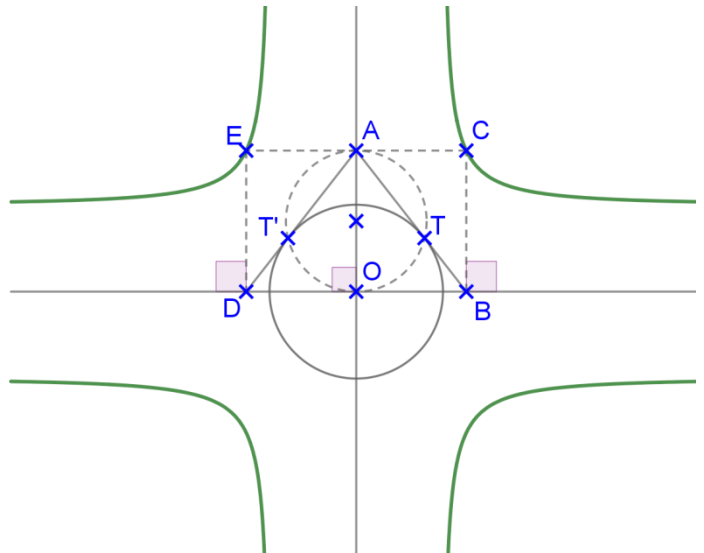
Definição 3: Considere uma circunferência com os pontos A e B fixos e um ponto C sobre a reta AB . Sejam $CD \perp BC$, $CP \perp BD$ e $CQ \perp BE$. O lugar geométrico dos pontos P e Q é a curva **bifolium irregular**.



Exercício proposto:

Construa 3 curvas bifolium usando cada uma das definições. Utilize posições diferentes da elipse e da parábola na definição 2 para obter formatos diferentes das curvas.

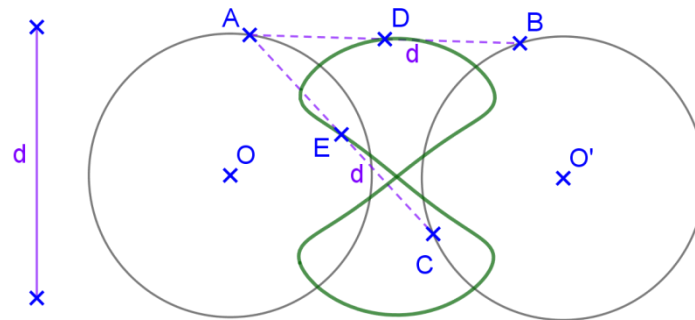
Definição: Dados uma circunferência e dois diâmetros perpendiculares, determine um ponto A pertencente a uma reta suporte de um destes diâmetros. Construa as retas tangentes à circunferência que passam por A , determinando os pontos B e D no outro diâmetro. Se $BC \parallel AO$ e $AC \parallel OB$, então C pertence à **crosscurve** (curva em forma de cruz).



Exercício proposto:

Construa uma crosscurve, dada uma circunferência com a medida do raio r .

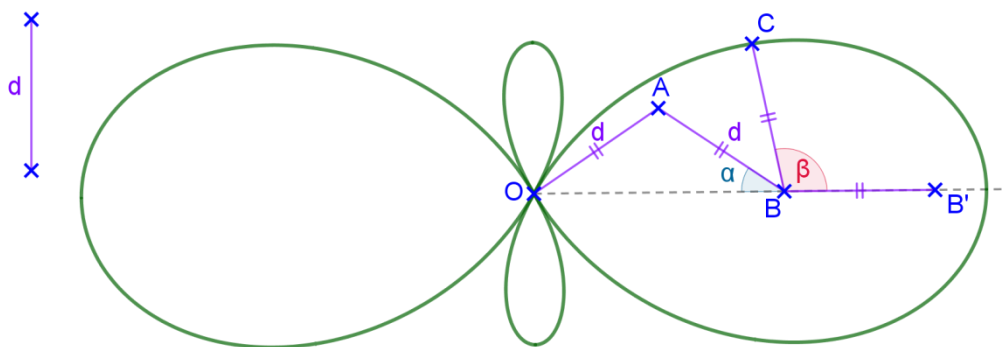
Definição: Dadas as circunferências de centros O e O' , com raios iguais a r , um segmento d e o ponto móvel A , determine na circunferência de centro O' os pontos: B tal que $AB = d$ e C tal que $AC = d$. O lugar geométrico de D e E , pontos médios de AB e de AC , é a **curva de Watt**, ou **lemniscóide**.



Exercício proposto:

Construa uma curva de Watt dadas as circunferências de raio r e a distância d .

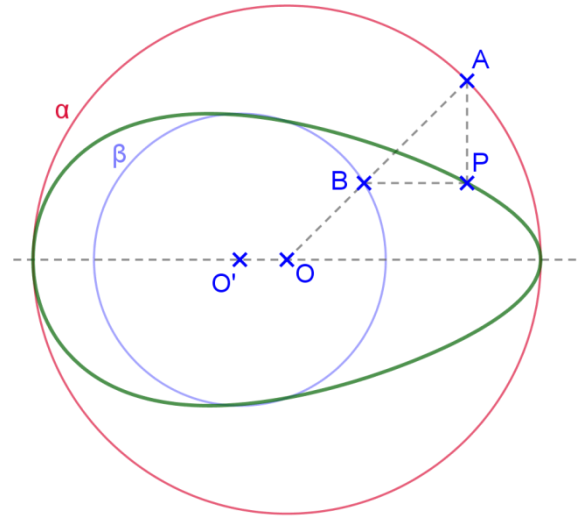
Definição: Dados uma semi-reta de origem O e uma distância fixa d , determine: um ponto móvel B na semi-reta; o ponto A tal que $AO = AB = d$ e $\widehat{AOB} = \widehat{ABO} = \alpha$; C tal que $BC = AB = d$ e $\beta = 3\alpha$. O lugar geométrico do ponto C é a **trissetriz de Ceva**.



Exercício proposto:

Construa uma trissetriz de Ceva, dada a medida d , o ponto fixo O e a semi-reta de origem O .

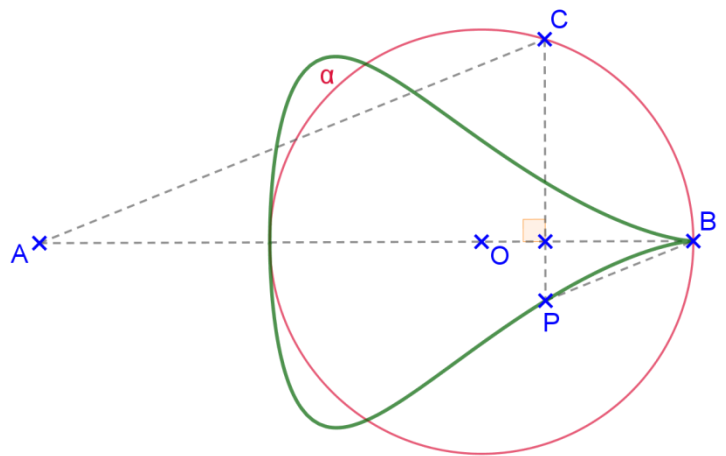
Definição: Dadas as circunferências α e β , determine um ponto qualquer A de α e o ponto B de interseção da reta AO com β . Construa BP paralelo a OO' e AP perpendicular a OO' . O lugar geométrico do ponto P é a **oval de Hügelschäffer**.



Exercício proposto:

Construa uma oval de Hügelschäffer dadas as circunferências α e β .

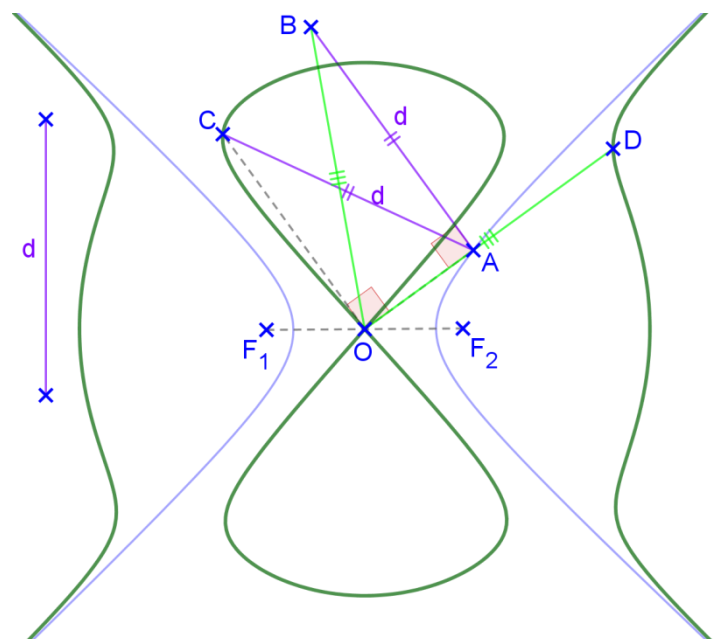
Definição: Dados a circunferência α de centro O, e o ponto A, determine o ponto B de interseção da reta AO com α . Determine um ponto C de α e construa as retas CP perpendicular a AB e BP paralela a AC. O lugar geométrico do ponto P é a **curva de Rosillo**.



Exercício proposto:

Construa uma curva de Rosillo, dados um ponto A e uma circunferência α .

Definição: Também chamada de “curva do diabo”, a **curva de Cramer-Lacroix** tem como elementos iniciais uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e um segmento d. Determine um ponto A da hipérbole e trace as retas AO, AH e OC, onde OC e AH são perpendiculares a AO. Marque os pontos H ($AH = d$), B ($BO = OH$) e C ($AC = d$). O lugar geométrico dos pontos B e C é a curva de Cramer-Lacroix.



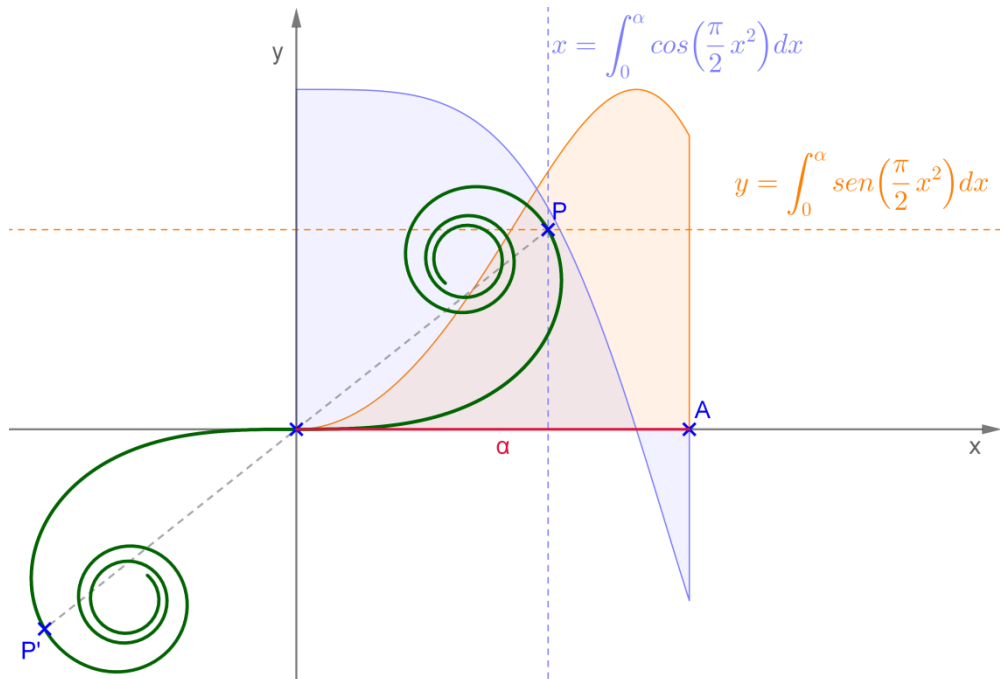
Exercícios propostos:

1. Construa uma curva de Cramer-Lacroix, dadas uma distância d e uma hipérbole.
2. Construa uma curva de Cramer-Lacroix em uma elipse com uma distância dada d.

3.2.4. Curvas paramétricas

Algumas curvas que vimos como lugares geométricos também podem ser representadas na forma paramétrica, ou seja, usando-se uma equação com parâmetros que envolvem ângulos ou segmentos.

Definição: A **espiral de Cornu**, também conhecida como **clotóide** ou **espiral de Euler**, é uma curva cujo raio de curvatura varia linearmente ao longo de seu comprimento. Esta curva assegura um decréscimo linear do raio de curvatura com o caminho percorrido ao longo do seu desenvolvimento, proporcionando assim uma variação gradual da curvatura.



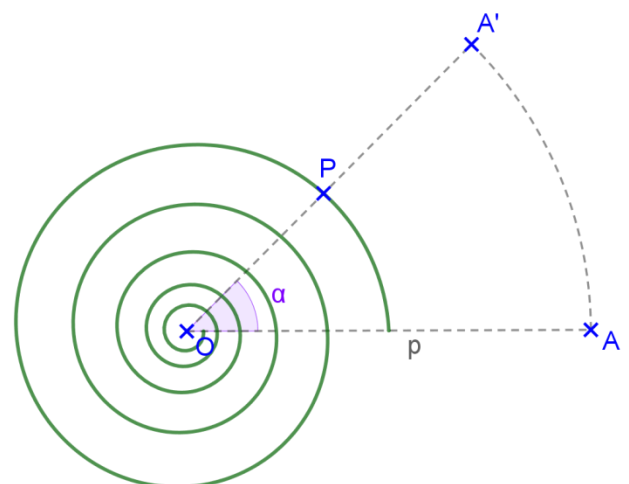
Exercício proposto:

Determine um dos pontos P da espiral de Euler, considerando o ponto A sobre um segmento e definido sobre o eixo x. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

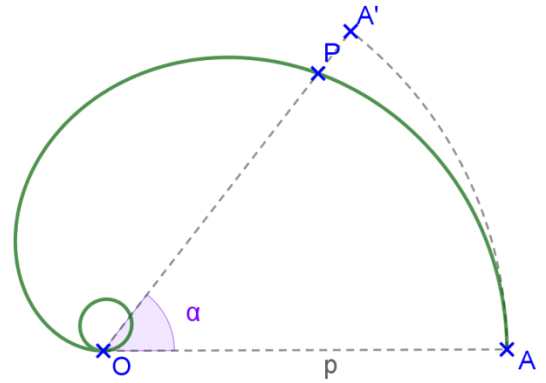
Definição: um ponto P da **espiral curva**, similar à mola de bobina de relógio, satisfaz a equação polar $OP = \frac{p}{1+e^{m \cdot \alpha}}$, onde O é o centro, p = OA e m são parâmetros da curva.

Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral curva com a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



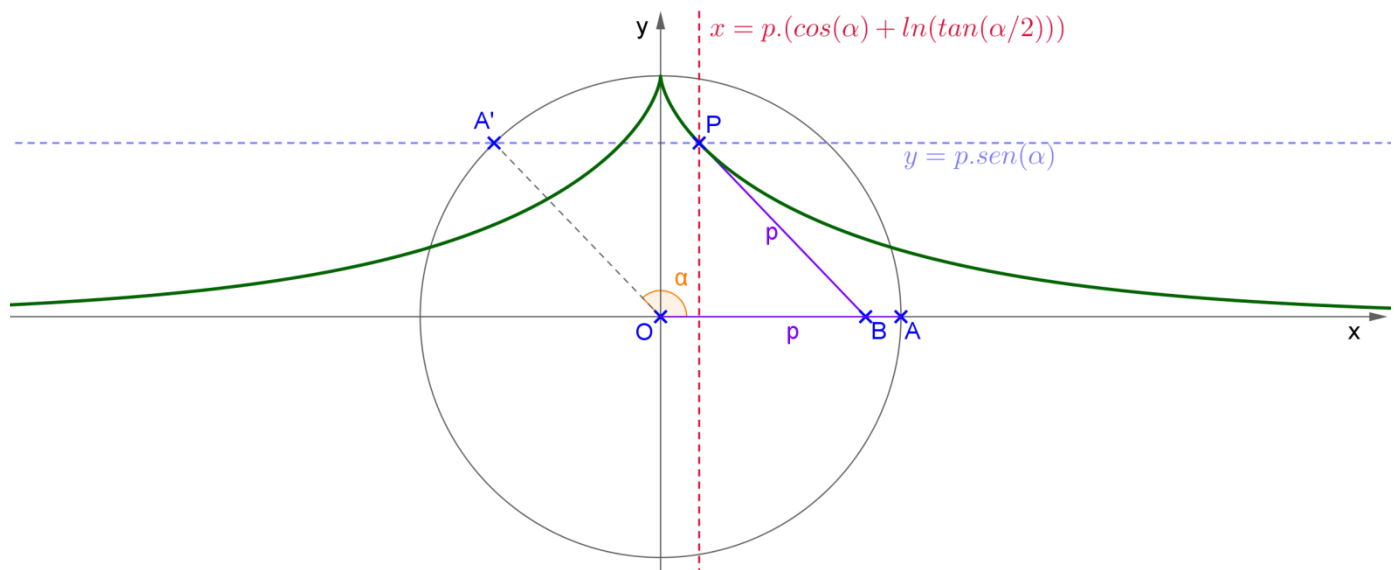
Definição: um ponto P da **espiral cóclea (caracol)** satisfaz a equação polar $OP = \frac{p \cdot \text{sen}(\alpha)}{\alpha}$, onde O é o centro e p o parâmetro da curva.



Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral cóclea com a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

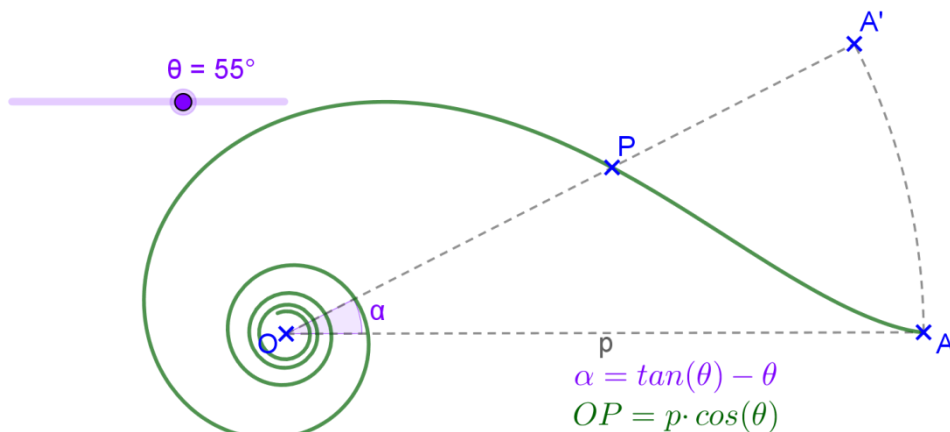
Definição: **Tratriz** é a curva da trajetória de uma extremidade P de um fio inextensível de comprimento $AO = p$ mantido esticado, cuja extremidade B se desloca por uma reta (eixo x).



Exercício proposto:

Determine um ponto P da tratriz com as equações de x e y. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado. Determine o ponto B do eixo x tal que $BP = p$.

Definição: **Espiral tratriz** é a curva da trajetória de uma extremidade P de um fio inextensível de comprimento $\frac{p}{2}$ mantido esticado, cuja extremidade A se desloca por uma circunferência de raio $\frac{p}{2}$.

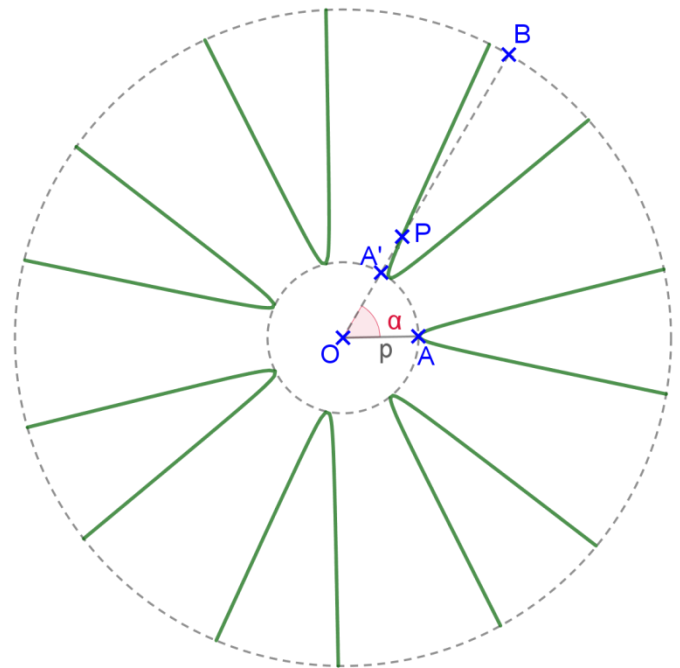


Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral tratriz com as equações polares. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

Encontre um ponto B tal que $BP = OP = \frac{p}{2}$. Defina a interseção de BP com a reta perpendicular a OP que passa por O. Ao movimentar o ponto P a distância BC é modificada?

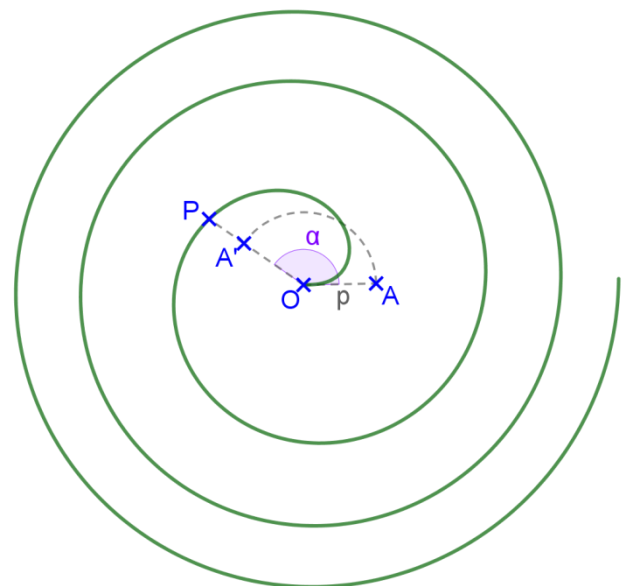
Definição: Dados o número n e a circunferência de centro O e raio $AO = p$, o ponto P da **curva epi** satisfaz a equação polar $OP = \frac{p}{\cos(n \cdot \alpha)}$.



Exercício proposto:

Determine um ponto P da curva epi usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

Definição: um ponto P da **espiral de Fermat** satisfaz a equação polar $OP = p\sqrt{\alpha}$, onde O é o centro e $p = OA$ o parâmetro da curva.

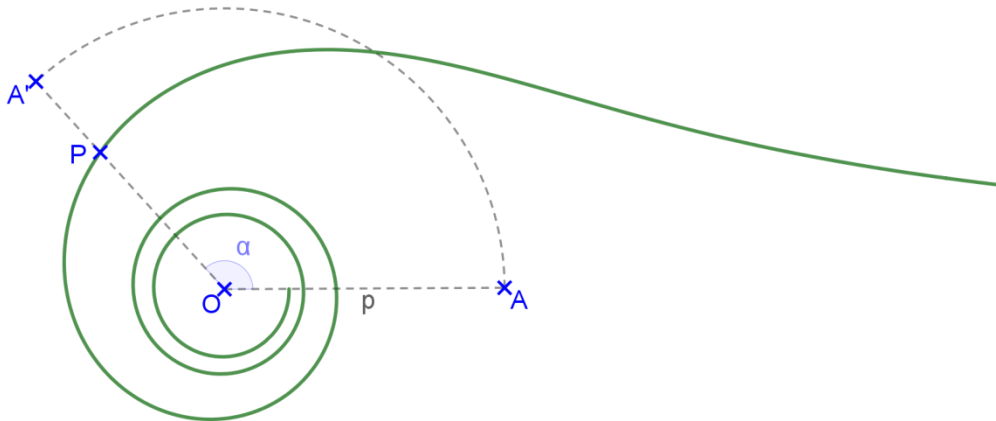


Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral de Fermat usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

Definição: Espiral Lituus é a curva com ângulo inversamente proporcional ao quadrado do raio. Esta espiral se aproxima cada vez mais da origem, mas nunca a alcança. A equação polar desta curva é

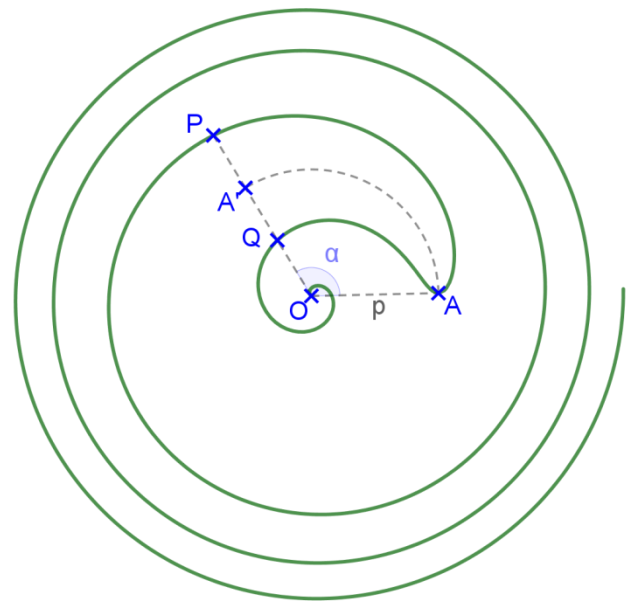
$$OP = p \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \text{ onde } O \text{ é o centro e } p = OA \text{ o parâmetro da curva.}$$



Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral Lituus usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

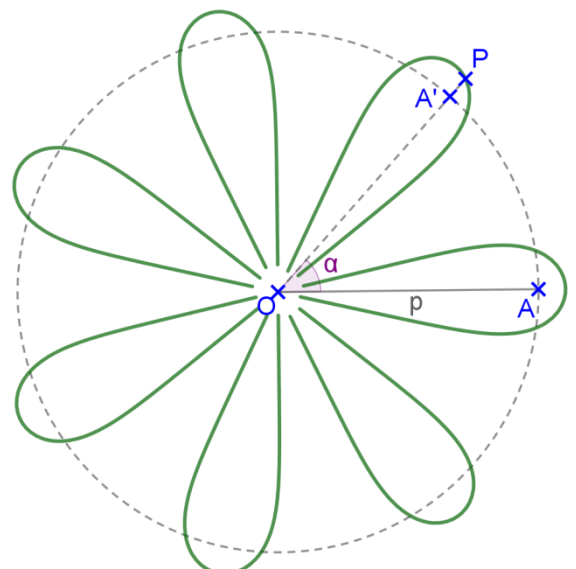
Definição: um ponto P da **espiral parabólica** satisfaz a equação $OP = p \pm \sqrt{2b \cdot p \cdot \alpha}$, onde O é o centro, $p = AO$ e b são os parâmetros da curva.



Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral parabólica usando as equações polares. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

Definição: Dados o número n e a circunferência de centro O e raio $AO = p$, o ponto P da **espiral sinusoidal** satisfaz a equação polar $OP = p \cdot \sqrt[2]{\cos(n \cdot \alpha)}$.



Exercício proposto:

Determine um ponto P da espiral sinusoidal usando a equação polar. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

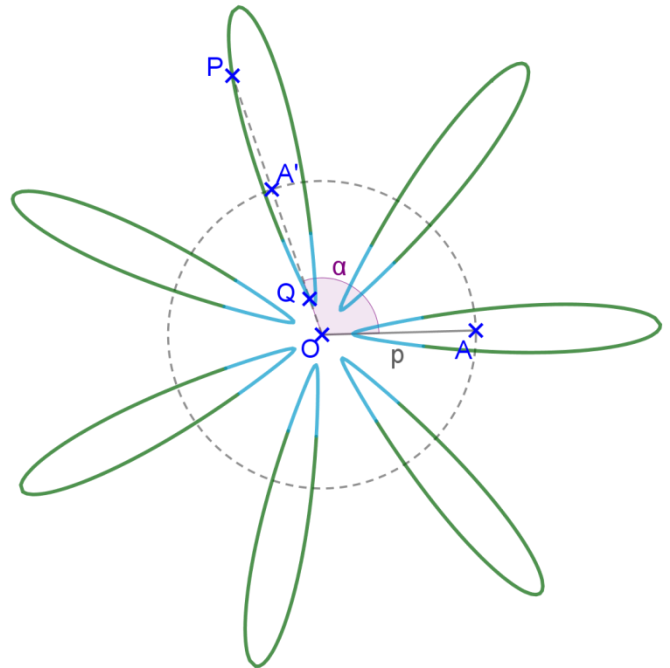
Definição: Dados os números m e n e a circunferência de centro O e raio $AO = p$, os pontos P e Q da **curva foliíode** satisfazem as equações:

$$OP = p \cdot \left(m \cdot \cos(n \cdot \alpha) + \sqrt{1 - (m \cdot \sen(n \cdot \alpha))^2} \right)$$

$$OQ = p \cdot \left(m \cdot \cos(n \cdot \alpha) - \sqrt{1 - (m \cdot \sen(n \cdot \alpha))^2} \right)$$

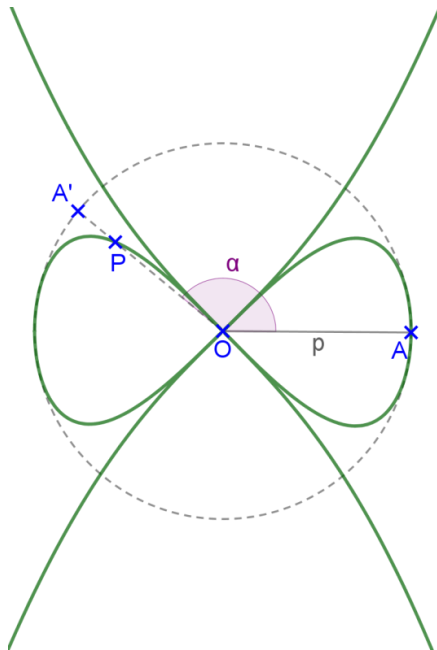
Exercício proposto:

Determine um ponto P da curva foliíode usando as equações polares. Construa a curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

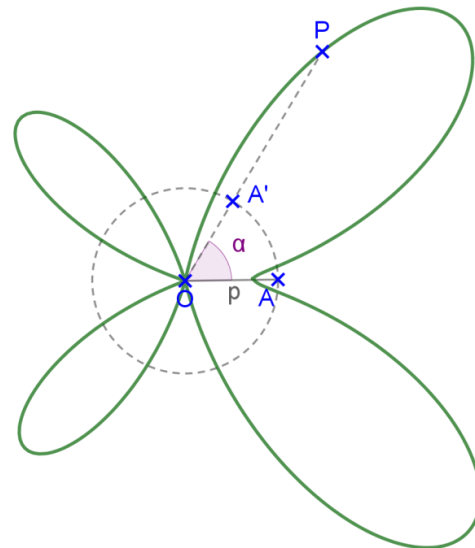


3.2.5. Curvas ornamentais

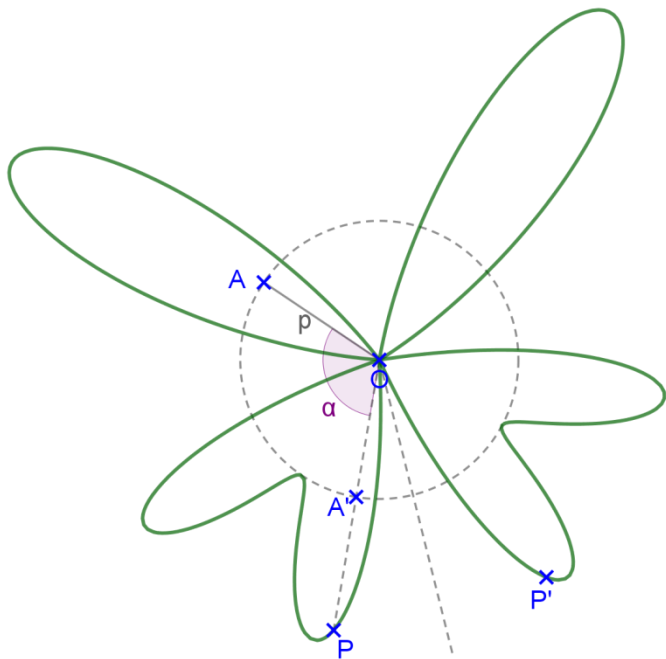
Seguindo o mesmo raciocínio dos exercícios propostos das curvas paramétricas, vamos determinar um ponto P de cada curva ornamental usando as respectivas equações polares. Depois, podemos construir cada curva ornamental usando o lugar geométrico do ponto P determinado.



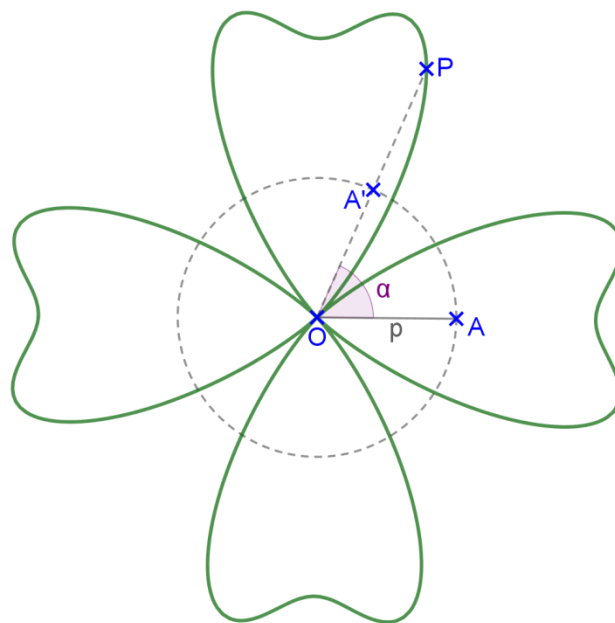
$$OP = p \cdot \frac{\sqrt{|\cos(2\alpha)|}}{\cos(\alpha)^2}$$



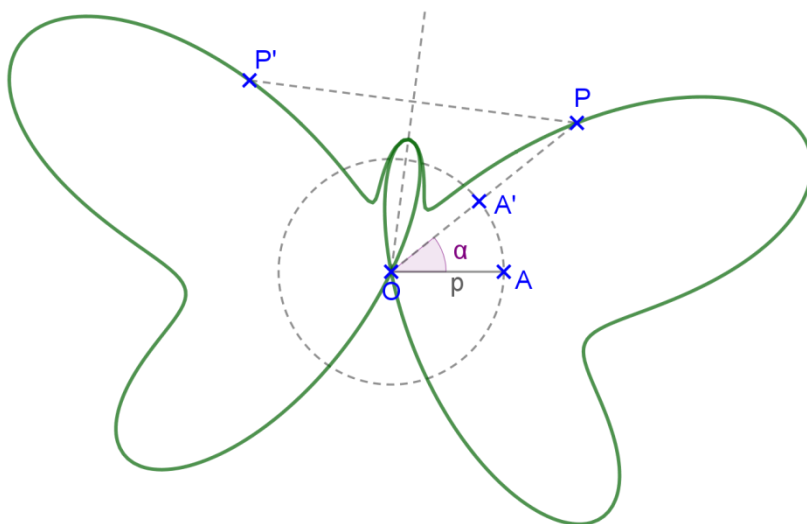
$$OP = p \cdot \left(e^{\cos(5\alpha)} - 2 \cos(4\alpha) + \left(\sen\left(\frac{\alpha}{12}\right) \right)^5 \right)$$



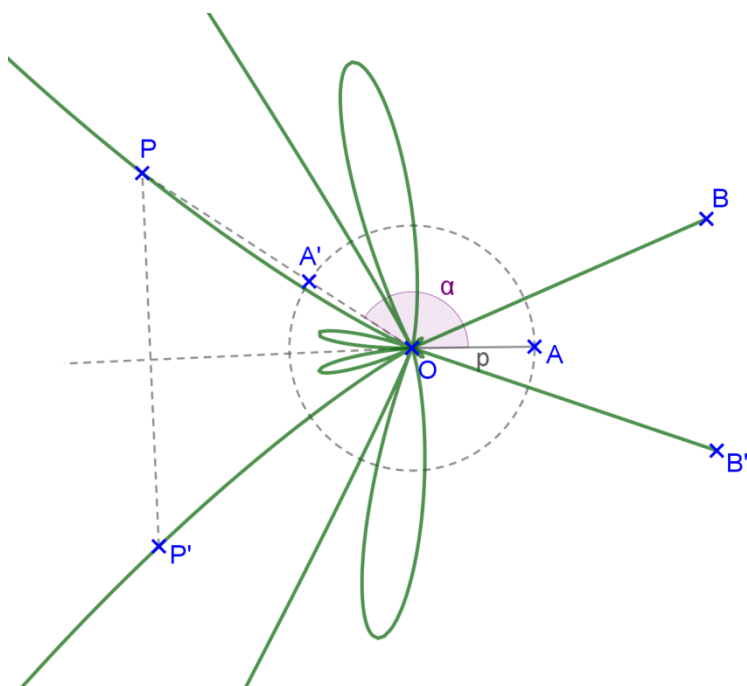
$$OP = p \cdot (-3\cos(2\alpha) + \text{sen}(7\alpha) - 1)$$



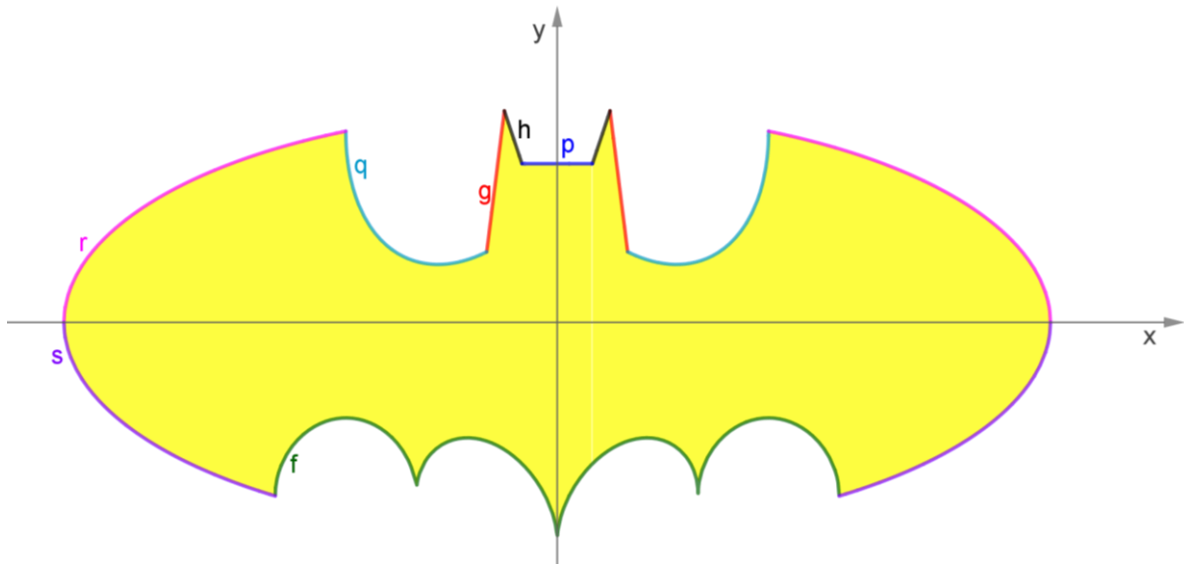
$$OP = p \cdot (1 + \cos(n \cdot \alpha) + (\text{sen}(n \cdot \alpha))^2)$$



$$OP = p \cdot (\text{sen}(5\alpha) + 3\cos(\alpha))$$



$$OP = p \cdot \left(\frac{\left(5\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^3 (\cos(4\alpha))^2}{\tan\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} \right)$$



$$f(x) = \left| \frac{x}{2} \right| - \frac{3\sqrt{33}-7}{122} x^2 - 3 + \sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2} - 0.1$$

$$g(x) = 9 \sqrt{\frac{|-(|x| - 1)(|x| - 0.75)|}{-(|x| - 1)(|x| - 0.75)}} - 8|x|$$

$$h(x) = 3|x| + 0.75 \sqrt{\frac{|-(|x| - 0.5)(|x| - 0.75)|}{-(|x| - 0.5)(|x| - 0.75)}}$$

$$p(x) = 2.25 \sqrt{\frac{|-(x - 0.5)(x + 0.5)|}{-(x - 0.5)(x + 0.5)}}$$

$$q(x) = 6 \cdot \frac{\sqrt{10}}{7} + (1.5 - 0.5|x|) \sqrt{\frac{||x| - 1|}{|x| - 1}} - 6 \cdot \frac{\sqrt{10}}{14} \sqrt{4 - (|x| - 1)^2}$$

$$r(x) = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{7}\right)^2} \sqrt{\frac{||x| - 3|}{|x| - 3}}$$

$$s(x) = -3 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{7}\right)^2} \sqrt{\frac{||x| - 4|}{|x| - 4}}$$

Exercícios propostos:

Determine um ponto P de cada curva usando as respectivas equações polares dadas a seguir. Construa cada curva usando o lugar geométrico do ponto P determinado.

1. $OP = p \cdot (1 + (\cos(n\alpha))^3 + (\sin(n\alpha))^2)$, onde $n = 3, 4$ e 5

2. $OP = \frac{p \cdot \cos(2\alpha)}{(\cos(\alpha))^2}$

3. $OP = p \cdot |\tan(\alpha)|^{\frac{2}{|\tan(\alpha)|}}$

4. $OP^2 = p \cdot \tan(3\alpha)$

5. $OP^2 = p \cdot |\cotg(5\alpha)|$

6. $OP = \frac{p \cdot \alpha}{\alpha + \beta}$

7. $OP = p \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(2\alpha)$

8. $OP = p \cdot \sin(\alpha) \cdot (\cos(2\alpha))^2$

9. $OP = p \cdot \sin(\alpha) \cdot (\sin(7\alpha))$

